Fizika alapok vegyészeknek
Mechanika II.: periodikus mozgások

Surján Péter

2018. november 10.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Körmozgás

Pontszerű test mozog egy szabályos körpályán.

Ez nem szabad mozgás: valakinek ott kell tartania a körön! (Vö.: tehetetlenség törvénye).

1.1. Az egyenletes körmozgás leírása

A kerületi sebesség definíciója:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

ds : kis ívhossz

dt : kis idő, ami alatt a pont befutja a kis ívhosszat

Egyenletes körmozgás: ha a kerületi sebesség állandó.

Jellemzők:

- r sugár
- v kerületi sebesség
- φ szögelfordulás
- ω szögsebesség

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

v és ω összefüggése:

$$ds = r d\varphi$$

(ez tkp. a szög definíciója!)

$$v = \frac{dr\varphi}{dt} = r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega} = r\omega$$

- periódusidő (T): amennyi idő alatt a test 1x körbemegy.
  A teljes kör: $d\varphi = 2\pi$, így

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}$$

- frekvencia (ν) = fordulatszám (n):

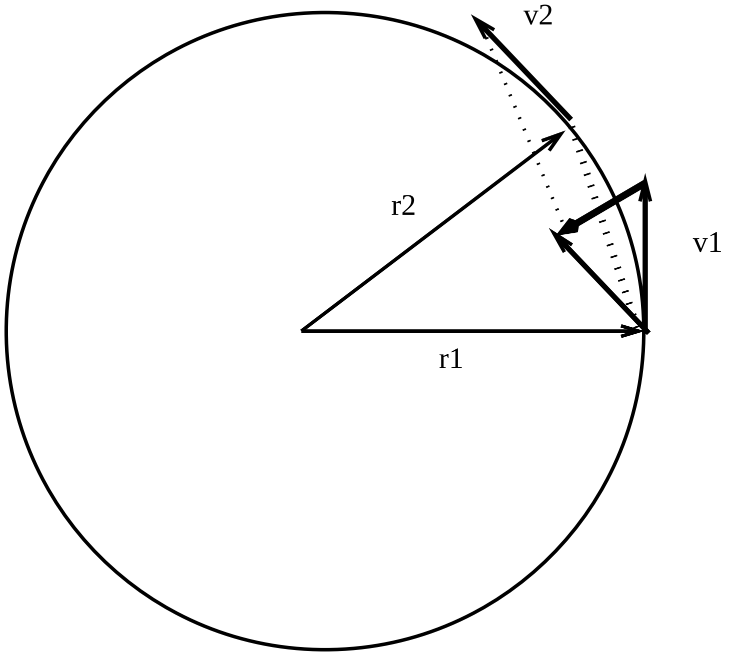
$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\ \nu$$

1.2. A centripetális gyorsulás

Az egyenletes körmozgás esetén is VAN GYORSULÁS, mert a körsebesség nagysága állandó ugyan, de az iránya folyamatosan változik.

A gyorsulás iránya a sebesség változásának irányával egyezik meg a gyorsulás fogalmából következően. Ez, az ábráról leolvashatóan, a kör középpontja felé mutat — ezért is hívjuk ”centripetálisnak”.



A centripetális gyorsulás nagysága az r_1 és r_2 vektorok által kifeszített háromszög valamint a v_1 vektor és a v_2 vektor eltoltja által kifeszített háromszögek hasonlóságából:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{v}{r}$$

azaz

$$dv = \frac{v}{r}ds$$

(itt $dv = v_2 - v_1$, $ds = r_2 - r_1$, ami azért vehetünk egyenlőnek az ívhosszal, mert a $ds \to 0$ határátmenetet nézzük) miatt

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

De $v = r\omega$, ezért

$$a = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

1.3. A centripetális erő

Ugyanerre a következtetésre jutunk dinamikai meggondolásból is. Ugyanis az egyenletes körmozgást végző testre ható erőnek nem lehet érintő irányú (=tangenciális) komponense, hiszen ha lenne, akkor a kerületi sebesség nem maradna állandó. A körpályán tartó erő tehát merőleges kell legyen az érintőre, azaz sugárirányú kell legyen. Ezt hívjuk centripetális erőnek. Ha pedig az erő a középpont felé mutat, akkor az általa létrehozott gyorsulás is ilyen irányú kell legyen.

A centripetális erő nagysága azonnal adódik a centripetális gyorsulás nagyságából:

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

Példák: bolygómozgás, műhold-probléma, A H atom Bohr-féle modellje.

1.4. Az egyenletesen gyorsuló körmozgás

Ha a körmozgás nem egyenletes, a kerületi sebesség is változik (pl. az autógumi induláskor).

Ilyenkor célszerű bevezetni a szöggyorsulás (β) fogalmát:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

Mivel

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

β így is írható:

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

azaz a szöggyorsulás az elfordulás szögének második deriváltja. Figyeljük meg, hogy az idő szerinti deriválást egyszerűen a mennyiség fölé helyezett ponttal is jelölhetjük.

Ha a gyorsulás egyenletes, $\beta = konstans$. Ebben az esetben az elfordulás szögét az idő függvényében két egymás utáni, idő szerinti integrálással kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \beta \\ \omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} &= \beta\, t + \omega(0) \\ \varphi(t) &= \frac{1}{2}\beta\, t^2 + \omega(0)\, t + \varphi(0), \end{aligned}$$

ahol az $\omega(0)$ és $\varphi(0)$ konstansok az integrációs állandók (rendre a szögsebesség és a kezdő szög $t = 0$ pillanatban érvényes kezdeti értékei). A szög t pillanatban érvényes φ értékét akkor kapjuk meg, ha a $\omega(0)$ és $\varphi(0)$ ún. kezdeti feltételek számértékét megadjuk.

Kezdeti feltételek

2. fejezet

Rezgőmozgás

2.1. Harmonikus rezgés

A fizikában egy (szemléletesen szólva) rugóra akasztott, tehát rezegni képes testet oszcillátornak hívunk. A tapasztalat szerint a rezgéseket kormányozó F rugóerő kis kitérések esetében arányos az x kitéréssel, és azzal ellentétes előjelű: oszcillátor

$$F = -k\,x$$

Az ellentétes előjel oka, hogy egy ”jobbra” kitért oszcillátort a rugóerő ”balra”, tehát visszahúzza az egyensúlyi helyzet ($x = 0$) irányába. Ha az oszcillátor az $x = 0$ pontban van, nem hat rá erő, és ha áll, ott is marad egyensúlyban. Ha mesterségesen kitérítjük és elengedjük, vagy meglökjük (azaz kezdősebességet adunk neki), akkor rezegni fog. Ennek leírásával foglalkozunk az alábbiakban.

harmonikus oszcillátor

A fenti, lineáris erőtörvény határára végbemenő rezgést harmonikusnak hívjuk. Ennél általánosabb

$$F = -k_1\,x \,\pm\, k_2 x^3 \pm \ldots$$

erőtörvény alapján történő rezgések pedig nem harmonikusak. A kémiában gyakori, hogy a rezgés majdnem harmonikus. Ilyenkor k_1 a többi állandó mellet nagy, de az utóbbiak sem nullák.

anharmonikus rezgés

2.2. A rezgőmozgás dinamikája

A dinamika alapegyenlete (Newton II. trv.) az egyszerűsített idő szerinti deriválás jelöléssel (a gyorsulás $a = \ddot{x}$):

$$F = m\,\ddot{x},$$

ami harmonikus rezgés esetén így is írható:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}\,x. \tag{2.1}$$

Ebből az egyenletből kell meghatározzuk a kitérés $x(t)$ függvényét. Olyan függvényt kell kitaláljunk, aminek a második deriváltja arányos, és ellentétes előjelű, mint maga a függvény. Hamar rá lehet jönni, hogy két ilyen függvény van:
A) a szinusz és
B) a koszinusz
Legyen ugyanis

A)

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(\omega t) \qquad (2.2)\\ \dot{x}(t) &= \omega\cos(\omega t)\\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\sin(\omega t) \end{aligned}$$

azaz (2.1) alapján

$$-\omega^2\sin(\omega t) = -\frac{k}{m}\sin(\omega t)$$

$$-\omega^2 = -\frac{k}{m}$$

$$k = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Az utóbbi eredmény $\omega = 2\pi\nu$ miatt írható

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

alakban is, és megmutatja az összefüggést a rezgés ν frekvenciája (vagy ω körfrekvenciája) valamint a k rugóállandó és a test m tömege között.

Ez még nem az általános megoldás, hiszen $x(t)$ a rá vonatkozó (2.1) egyenlet linearitása miatt megszorozható egy tetszőleges A konstanssal Tehát a

$$x(t) = A\sin(\omega t) = A\ \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t)$$

formula adja meg a kitérést ebben a megoldásban. Az A számot a rezgés amplitúdójának hívjuk, mert (a szinuszfüggvény legnagyobb, 1 értéke esetén) A számértéke a legnagyobb kitérés. Az $\omega = 2\pi\nu$ számot a rezgés körfrekvenciájának, ν-t frekvenciának hívjuk. A rezgés T periódusideje alatt a szinuszfüggvény argumentuma éppen 2π-vel változik:

Amplitúdó

rezgés (kör)frekvenciája

periódusidő

$$\omega T = 2\pi,$$

amiből a periódusidő:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

a körmozgásnál megszokott összefüggéshez hasonlóan.

B) A másik lehetséges megoldás a koszinusz függvény:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega t) \\ \dot{x}(t) &= -\omega\sin(\omega t) \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2\cos(\omega t), \end{aligned}$$

azaz a rezgést most az

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

függvény írja le, és ω-ra változatlanul a $\sqrt{\frac{k}{m}}$ képlet kapjuk. A két megoldás között a rezgés ún. *fázisában* van különbség: a szinuszos megoldás esetében $t = 0$-kor a rezgő test az origóban van, a koszinuszos megoldás esetén pedig $t = 0$-kor $x = A$.

Ha már ismerjük a komplex számokra érvényes

$$\exp i\phi = \cos\phi + i\ \sin\phi$$

ún. Euler-összefüggést, a fenti A) és B) megoldások egyetelen képletben is össze tudjuk foglalni. Ugyanis az

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x$$

egyenlet megoldása kereshető exponenciális alakban is:

$$x(t) = A \exp i\omega t,$$

hiszen az exponenciális függvény deriváltja arányos a függvénnyel. A negatív előjelet a kétszeres deriválás során megjelenő $i.i\omega^2 = -\omega^2$ eredmény biztosítja.

A komplex alakú megoldásnak azonban a valós részét kell venni. A komplex amplitudót

$$A = B - i\,C$$

alakban írva, az Euler összefüggés felhasználásával a harmonikus oszcillátor kitérésének időfüggése

$$\begin{aligned} x(t) &= Re\,\{(B - iC)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\} \\ &= B\cos\omega t + C\sin\omega t \end{aligned}$$

alakú lesz. Itt a coszínuszos és a színuszos fázis B, C amplitúdóit a kezdeti feltételekből (pl. a kezdő koordináta és kezdősebesség) lehet meghatározni.

2.3. Energetika

Vegyük azt az esetet, amelyben $t = 0$-kor elengedjük az A-val kitérített testet:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

A test sebességének időfüggése tehát:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

Mozgási energiája pedig:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t)$$

Ez az energia a $t = 0 - ban$ érvényes 0 értékről $\omega t = \pi/2$-re a maximális

$$E_{\text{kin}}^{\text{max}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

értékre nő fel.

Az energiamegmaradás törvénye szerint a kinetikus (=mozgási) energia és a potenciális (=helyzeti) energia összege állandó kell legyen:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = const = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2.$$

Ez esetünkben, amikor a kinetikus energia színuszos függvény, csak úgy teljesülhet, ha a potenciális energia coszínuszos:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)}_{E_{\text{kin}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}_{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2.$$

Azt látjuk, hogy a potenciális energia időfüggése:

$$V = E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \tag{2.3}$$

Az erő definíció szerint a potenciál hegatív deriváltja

$$F = -kx = -\frac{dV}{dx},$$

amiből $x = A\cos(\omega t)$ miatt a

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

potenciál alak következik. Erről könnyen meggyőződhetünk, mert ha ide $x(t)$ értékének négyzetét behelyettesítjük, visszakapjuk a (2.3) formulát.

A harmonikus rezgőmozgás potenciálja

2.4. Rezonancia

Amit eddig vizsgáltunk, az a kitérített és magára hagyott, vagy kezdetben meglölött és magára hagyott test szabad rezgése volt. Az ω körfrekvenciának megfelelő $\nu = \omega/2\pi$ frekvenciát a rezgés sajátfrekvenciájának hívjuk.

szabadrezgés

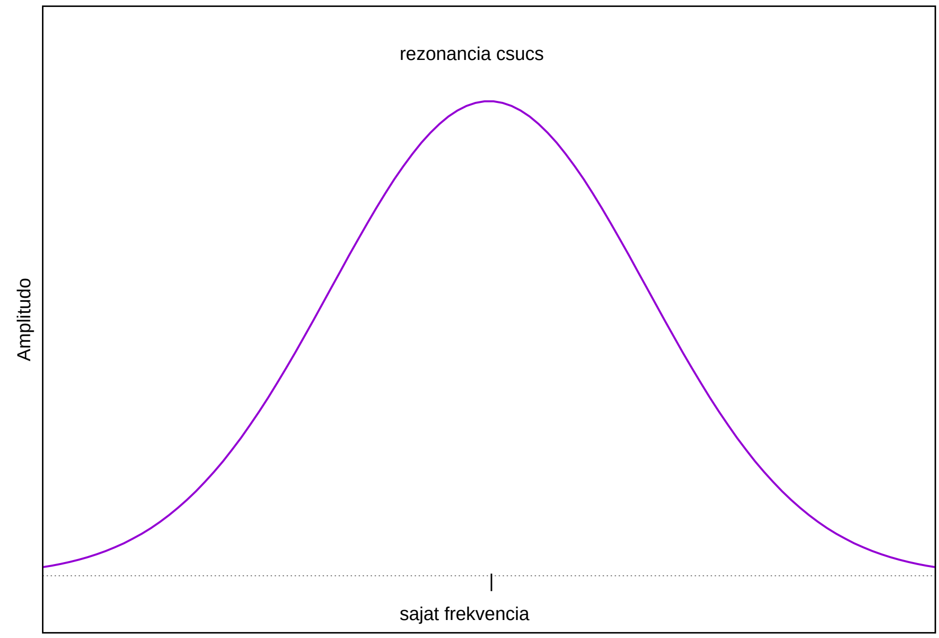
sajátfrekvencia

Megtehetjük azonban, hogy külső erővel periodikusan rángatunk egy rugóra akasztott testet. A test ilyenkor nem a rugó sajátfrekvenciájával rezeg, hanem ún. kényszerrezgést végez.

kényszerre

Ha a kényszerrezgés frekvenciája közeledik a sajátfrekvenciához , a test egyre "szívesebben" válaszol a rezgetésre, őn. rezonancia lép fel. Ilyenkor a rezgés amplitúdója megnövekedik (ld. az ábrát), szélsőséges esetben a rezgő szerkezet akár össze is omolhat (pl. a Tacoma-híd katasztrófája).

rezonancia



2.5. Rezgőmozgés és körmozgás kapcsolata

összetett rezgések

Ha a test egyszerre két vagy több irányban végez rezgőmozgást, érdekes jelenségek keletkezhetnek.

Egy igen egyszerű eset az alábbi, x és y irányú, azonos frekvenciájú és amplitudójú összetett rezgés:

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

$$y(t) = A \cos(\omega t)$$

A két rezgés fázisa tehát $\pi/2$-vel különbözik, ami az $x(0) = 0$ és az $y(0) = A$ kezdeti feltételeknek felel meg.

Az összetett rezgés végző test síkbeli pályájának egyemetét megkapjuk, ha ennek a két egyenletnek a négyzetét összeadjuk:

$$x^2(t) + y^2(t) = A^2 \sin^2(\omega t) A^2 \cos^2(\omega t) = A^2,$$

ami egy A surgarú kör egyenlete. Ezen a körön halad a test a két merőleges irányú rezgés eredőjeképpen.

Fordítva fogalmazva: egy körmozgás ”oldalről nézve” rezgőmozgásnak látszik.

Ha a két amplitudó nem egyezik meg, az ellpiszis egyenletét kapjuk. Ha a fázisok és a frekvenciák is különböznek, igen változatos periodikusmozgások állhatnak elő (ún. Lissajous-görbék).

3. fejezet

Hullámmozgás

Egymáshoz csatolt oszcillátorok révén jön létre.

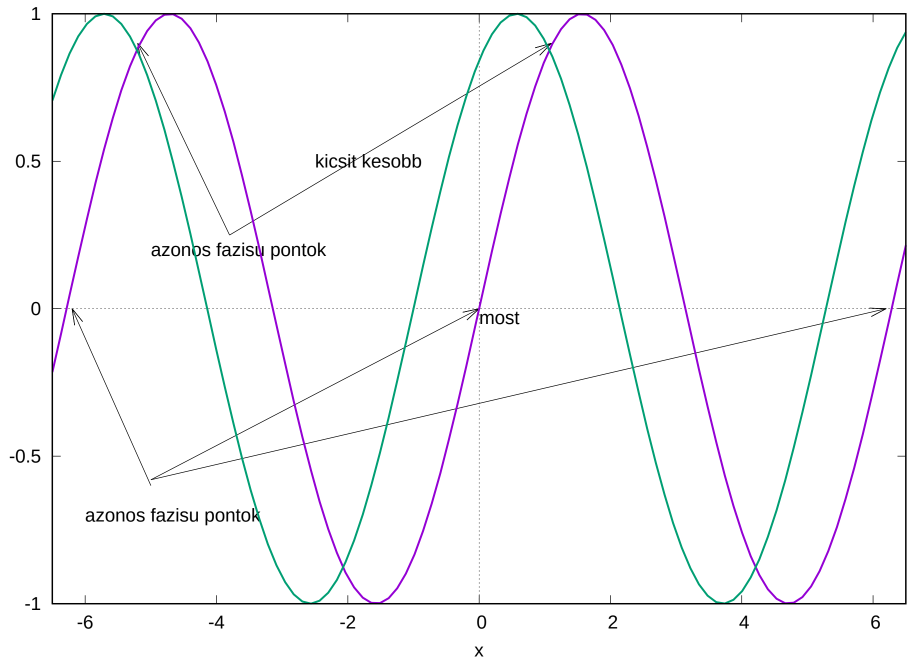
Longitudinális hullám: a rezgések a haladás irányában történnek.

Transzverzális hullám: a rezgések a haladás irányára merőlegesen történnek.

A hullám frekvenciája: a rezgő részecskék frekvenciája.

A hullám amplitudója: a rezgő részecskék amplitudója.

Fontos fogalom a fázis. Ezt legkönnyebb az ”azonos fázis” fogalmán keresztül megérteni. A hullám mentén azok a pontok vannak azonos fázisban, amelyeknek minden pillanatban megegyezik a kitérése (ld. az ábrát).



Hullámhossz: két szomszédos, azonos fázisban lévő pont távolsága.

Periódusidő: egy pont tejes rezgésének ideje ($T = 1/\nu$).

Mivel a hullán T idő alatt teszi meg a λ hullámhossznyi utat, a hullám terjedési sebessége:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda$$

Hullámfront: térbeli hullámok vagy közeg felöletén terjedő hullámzás esetén az azonos fázisban lévő pontok együttese.

Gázokban, folyadékok belsejében: csak longitudinális hullám jön szóba, mert ezeknek az anyagoknak csak térfogati rukalmassága van (pl. hanghullám).

Szilárd testekben, folyadékok felületén: lehet transzverzális hullám is, mert van ”alaki rugalmasság” is.

Elhajlás: egy résen bejutott hullám nem csak egyenesen terjed tovább, hanem a rés méretéhez képes egyre szélesebben.

Huygens-elv: A hullámfelület minden pontjából elemi hullámok indulnak ki, és ezek eredője a látható hullámmozgás.

Ez szépen illusztrálódik, ha nagyon kis résen (pici lyukon) engedjük át a hullámot, mert akkor azonnal minden irányban ”elhajlik”: úgy tűnik, hogy egy pontból (a rés pontjából) minden irányban terjed.

Interfrencia: hullámok találkozásakor lezajlódő jelenség, az összetevődő hullámok eredőjeként kialakuló mozgás. Egy adott pointban az azonos irányban mozgó rezgések erősítik egymást, az ellentéses irányban rezgők gyengítik, akár ki is olthatják egymást. (A fényhullám is, sőt az elektronok is mutatnak ilyen jelenséget).

4. fejezet

Merev testek forgó mozgása

Azt a forgást vizsgáljuk, amelyik egy adott tengely körül történik.

A korábbiaknak megfelelően értelmezhetjük a T periódusidő, a $\nu = 1/T$ frekvencia valamint az $\omega = 2\pi\nu$ körfrekvencia fogalmát. Egy forgó pont esetében értelmes a $v = r\omega$ kerületi sebesség fogalma is.

A merev test egyenlen forgó pontjának mozgási energiája:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Ha bevezetjük az ún tehetetlenségi nyomatékot a

$$\Theta = mr^2$$

definícióval, akkor a mozgási energia

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

alakban is írható.

Több pont esetében a tehetetlenségi nyomatékok összadódnak:

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2.$$

Ezért a pontrendszer (vagy akár egy egész merev test) teljes kinetikus energiáját is a

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

formula adja meg. Egy egész merev test esetében a folytonosság miatt nem egyszerűen összeadni, hanem integrálni kell, hogy megkapjuk a teljes test tehetetlenségi nyomatékát.

Fontos az impulzusnyomaték (=perdület) fogalma. A legegyszerűbb esetben a forgő mozgást végző tömegpont sebessége merőleges a sugárra, és ilyenkor az L impulzusnyomaték értéke:

$$L = rmv = rp \tag{4.1}$$

Általában, L vektormennyiség, és az

$$L = r \times p$$

képlettel definiáljuk, ahol a $\times$ jel a vektoriális szorzás jele.

A forgatónyomaték:

$$M = r \times F$$

Ahol F a testre ható erő.

Ha az (**??**) egyenlet időderiváltját vesszük:

$$\dot{L} = r \times \dot{p} = r \times F = M,$$

ahol felhasznltuk a $p = mv$ definícióból származó $\dot{p} = m\dot{v} = ma = F$ összefüggést. Más jelöléssel:

$$\frac{dL}{dt} = M \tag{4.2}$$

Az impulzusmomentum megváltozásáért tehát a forgatónyomaték a felelős.

Ha a forgatónyomaték 0, az impulzusnyomaték időben állandó:

$$\frac{dL}{dt} = 0.$$

Ez az összefüggés az impulzusnyomaték megmaradási törvénye.

Forgó mozgás esetében a kerületi sebesség, így a p impulzus merőleges a sugárra, ezért az impulzusnyomaték nagyságára következőt írhatjuk:

$$L = rp = rm\underbrace{v}_{r\omega} = \underbrace{r^2 m}_{\Theta}\omega = \Theta\omega$$

Ennek vegyük az idő szerinti deriváltját:

$$\frac{dL}{dt} = \Theta\dot{\omega} = \Theta\beta$$

hol β a korábban már bevezetett szöggyorsulás. Az impulzusnyomaték deriváltja azonban (4.2) szerint éppen az M forgatónyomaték, tehát:

$$M = \Theta\beta$$

a merev test forgásának mozgásegyenlete.