

1. Legyen  $\hat{A}$  és  $\hat{B}$  két hermitikus operátor,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  valós számok. Hermitikus-e

(a)  $\hat{A} + \hat{B}$

(b)  $\lambda \cdot \hat{A}$

(c)  $\lambda \hat{A} + \mu \hat{B}$

(d)  $\hat{A}\hat{B}$ ?

2. Legyen  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  Hilbert-tér, és tegyük fel, hogy itt  $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^n$  ONB. Legyen  $\hat{P} = |e_i\rangle\langle e_i|$  egy projektor. Adjuk meg a fenti bázison  $\hat{P}$  mátrixreprezentációját!

3. Legyen  $\hat{P}$  projektor. Mutassuk meg, hogy az  $\hat{A} = \hat{I} + \hat{P}$  operátor inverze a  $\hat{B} = \hat{I} - \frac{1}{2}\hat{P}$  operátor! (Itt  $\hat{I}$  jelöli az egységoperátort.)

4. Tekintsünk egy kétdimenziós  $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  Hilbert-teret. Legyen  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$  ONB. Az  $\hat{A} : H \rightarrow H$  lineáris operátor hatása a következő:  $\hat{A}|e_1\rangle = 3|e_1\rangle + |e_2\rangle$ ,  $\hat{A}|e_2\rangle = |e_1\rangle + 3|e_2\rangle$ .

- (a) Írjuk fel  $\hat{A}$  mátrixreprezentációját az  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$  bázison! Jelölje ezt a mátrixot  $A_e$ .

- (b) Legyen  $|f_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle)$ , és  $|f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - |e_2\rangle)$ . ONB-t alkot-e  $|f_1\rangle$  és  $|f_2\rangle$ ? Ha igen, írjuk fel  $\hat{A}$  mátrixát ebben a bázisban is!

- (c) Határozzuk meg  $\hat{A}$  sajátértékeit és sajátvektorait!

- (d) Keressük azt a  $C$  mátrixot, amelyre  $C \begin{pmatrix} |e_1\rangle \\ |e_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |f_1\rangle \\ |f_2\rangle \end{pmatrix}$ .

- (e) Határozzuk meg az  $A_e$  mátrix gyökét, vagyis azt a  $B$  mátrixot, amelyre  $B^2 = A_e$ .

5. Legyen  $\hat{A}$  korlátos operátor. Hogyan definiálnánk az  $e^{\hat{A}}$  operátort? Tegyük fel, hogy  $\hat{A}$  adott az  $\hat{A} = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$  spektrális alakban. Ennek segítségével hogyan adnánk meg  $e^{\hat{A}}$ -t?

6. Az alábbi függvényekről döntsük el, hogy melyik eleme az  $L^2[-1, 1]$ ,  $L^2[0, \infty]$ ,  $L^2[-\infty, \infty]$  térnek.

$$f_1(x) = x^2 - 2x, \quad f_2(x) = e^{-x}, \quad f_3(x) = e^{-x^2}, \quad f_4(x) = e^{x^2}$$

7. Tekintsük az  $L^2[0, 1]$  teret, és itt az  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = x$ ,  $f_3(x) = x^2$  függvényeket. Normáljuk  $f_1$ -et, a normált függvény legyen  $e_1$ . Definiáljuk a  $\hat{P}_1 = |e_1\rangle\langle e_1|$  projektort, és legyen  $\tilde{e}_2 = (1 - \hat{P}_1)f_2$ , valamint  $e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$ . Számítsuk ki  $e_2$ -t! Végül legyen  $\hat{P}_2 = |e_2\rangle\langle e_2|$  és  $\tilde{e}_3 = (1 - \hat{P}_1 - \hat{P}_2)f_3$ . Számítsuk ki az  $\tilde{e}_3$  és az  $e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|}$  vektorokat is! Mi ez az alkalmazott eljárás?

8. Mutassuk meg, hogy az  $L^2[-2, 2]$  téren az  $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$  függvények ortonormáltak! (Segítség:  $\sin(\alpha)\sin(\beta) = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))/2$ .)