1. Legyen $z = x + iy \in \mathbb{C}$, ahol x, y valós számok. Differenciálható-e komplex értelemben az $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény (ahol értelmes), ha

(a) $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$

(b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

(c) $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

Minden esetben f-et z-vel kifejezve is adjuk meg!

2. Legyen $A = 0$, $B = 1 + i$ a komplex számsík két pontja. Integráljuk az $\overline{AB}$ szakaszon az $f(z) = z^2$ függvényt!

3. Legyen $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Hol van pólusa f-nek?

4. Legyen $a \in \mathbb{C}$ egy rögzített pont, $r > 0$, és $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| = r\}$, azaz C az a középpontú, r sugarú kör. Alkalmas paraméterezéssel számítsuk ki az alábbi integrált!

$$\oint_C \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z$$

5. Tekintsük a következő kontúrt: $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| = 1\}$. Mivel egyenlőek az alábbi integrálok?

(a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{1+z^2} \mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{z}{1+z^2} \mathrm{d}z$

6. Mivel egyenlő az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+x^2} \mathrm{d}x$ integrál?

---

7. Legyen $(H, \langle . | . \rangle)$ Hilbert-tér, $\hat{A}$ és $\hat{B}$ ezen értelmezett operátorok. Mutassuk meg, hogy $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

8. Vegyük az $L^2[-1,1]$ teret, ez az $\langle f | g \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} f^*(x) g(x) \mathrm{d}x$ skalárszorzással Hilbert-teret alkot. Ellenőrizzük, hogy $f(x) = x$ eleme a térnek, és normáljuk f-et!

9. Legyen $(H, \langle . | . \rangle)$ Hilbert-tér, $0 \neq f \in H$. Tekintsük a $\hat{P} = \frac{|f\rangle\langle f|}{\langle f | f \rangle}$ operátort. Hogyan hat $\hat{P}$ egy $g \in H$ vektorra, mi ez a leképezés? Legyen $h = g - \hat{P}g$. Számítsuk ki az $\langle f | h \rangle$ skalárszorzatot!

10. Az előző feladatban szereplő $\hat{P}$ operátorról mutassuk meg, hogy idempotens, azaz $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Mik lehetnek $\hat{P}$ sajátértékei?

11. Tegyük fel, hogy $\{|i\rangle\}_{i=1}^n$ ONB. Vegyük a $\hat{H} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i |i\rangle\langle i|$ operátort, ahol λ_i-k számok. Mivel egyenlő $\hat{H}|j\rangle$? És $\hat{H}^2$?