

1. Adjuk meg a

$$(a) J(f) = \int_0^1 (f^2(x) - f(x)) dx$$

$$(b) J(f) = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{f^2(x)} - xf(x) \right) dx$$

funkcionálok első variációját a deriválási szabály használata nélkül!

2. Keressük meg a következő funkcionálok szélsőértékét:

$$(a) J(f) = \int_0^{\infty} (e^{-x} - f(x))^2 dx$$

$$(b) J(f) = \int_a^b (\ln f(x) - f(x) \sin^2 x) dx$$

$$(c) J(f) = \int_{-\infty}^{\infty} ((1+x^2)e^{f(x)} - f(x)e^{-x^2}) dx$$

3. Hol van a  $J(f) = \int_0^1 (xf(x) + (f'(x))^2) dx$  funkcionálnak szélsőértéke, ha csak olyan  $f$ -eket vizsgálunk, melyekre  $f(0) = a$ ,  $f(1) = b$ , ahol  $a$  és  $b$  előre megadott számok?

4. Hol van szélsőértéke a  $J(f) = \int_0^1 f(x) \cdot (f'(x))^2 dx$  funkcionálnak?

5. Keressük meg a következő funkcionálok szélsőértékét a  $[0, \pi/2]$  intervallumon normált függvények között:

$$(a) J(f) = \int_0^{\pi/2} f(x) \cos x dx$$

$$(b) J(f) = \int_0^{\pi/2} f(x) x^2 dx$$

6. Ritz-módszerrel próbáljuk meg közelíteni a

$$J(f) = \int_0^1 ((f'(x))^2 - f^2(x) + 2xf(x)) dx$$

funkcionál szélsőértékét, melyre  $f(0) = f(1) = 0$  teljesül. Próbafüggvénynek használjuk a  $\phi(x) = c(1-x)x$  függvényt, ahol  $c$  konstans. Határozzuk meg az optimális  $c$ -t, és hasonlítsuk össze  $\phi(x)$ -et a pontos megoldással.