1. Legyen $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = 1 - i$.

(a) $z_1^* = 1 - i$

(b) $z_1^* \cdot z_2 = (1 - i)(1 - i) = 1 - 2i + i^2 = -2i$

(c) $|z_1|^2 = z_1^* \cdot z_1 = (1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2$

(d) $|z_2|^2 = z_2^* \cdot z_2 = (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$

2. Legyen $\underline{a} = (1, 2, 3)$ és $\underline{b} = (-3, 0, 1)$.

$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, míg $|\underline{b}| = \sqrt{\underline{b} \cdot \underline{b}} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{e}_1(2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + \underline{e}_2(-1 \cdot +(-3) \cdot 3) + \underline{e}_3(1 \cdot 0 - (-3) \cdot 2) = 2\underline{e}_1 - 10\underline{e}_2 + 6\underline{e}_3.$$

3. Legyen $\underline{c} = (1, 1 + i, i)$ és $\underline{d} = (1, 1 - i, 0)$.

$|\underline{c}| = \sqrt{|1|^2 + |1 + i|^2 + |i|^2} = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2$

$|\underline{d}| = \sqrt{|1|^2 + |1 - i|^2 + |0|^2} = \sqrt{1 + 2 + 0} = \sqrt{3}$

$\underline{c} \cdot \underline{d} = 1^* \cdot 1 + (1 + i)^* \cdot (1 - i) + i^* \cdot 0 = 1 - 2i + 0 = 1 - 2i$

4. Vizsgáljuk meg a skalárszorzat tulajdonságait! Legyenek $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2)$ komplex koordinátájú vektorok.

(a) $\underline{a} \cdot (\lambda\underline{b}) = (a_1, a_2) \cdot (\lambda b_1, \lambda b_2) = a_1^* \cdot \lambda b_1 + a_2^* \cdot \lambda b_2 = \lambda(a_1^* \cdot b_1 + a_2^* \cdot b_2) = \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b})$

(b) $(\lambda\underline{a}) \cdot \underline{b} = (\lambda a_1, \lambda a_2) \cdot (b_1, b_2) = \lambda^* a_1^* \cdot b_1 + \lambda^* a_2^* \cdot b_2 = \lambda^*(\underline{a} \cdot \underline{b})$

(c) $(\underline{a}+\underline{b}) \cdot \underline{c} = (a_1+b_1, a_2+b_2) \cdot (c_1, c_2) = (a_1^*+b_1^*)c_1+(a_2^*+b_2^*)c_2 = a_1^*c_1+a_2^*c_2+b_1^*c_1+b_2^*c_2 = \underline{a} \cdot \underline{c}+\underline{b} \cdot \underline{c}$

(d) $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$

$\underline{a} \cdot \underline{a} = |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 \geq 0$ mindig nemnegatív valós szám. Sőt, csak akkor 0, ha $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, azaz ha $\underline{a}$ a nullvektor.

5. Legyenek $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ 2×2-es mátrixok.

(a) $\det(A) = i \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2i$, $\mathrm{tr}(A) = i + 2$, $A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $AB = \begin{pmatrix} 2i & 3i \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2i + 3 & 6 \\ 5i & 0 \end{pmatrix}$, $[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} -3 & 3i - 6 \\ 12 - 5i & 3 \end{pmatrix}$, ami nem a nullmátrix. A mátrixszorzás általában nem kommutatív.

6. A sajátértékek a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenlet megoldásai. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.

Ezért $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - 1 \cdot 1 = 0$ a megoldandó egyenlet. A megoldások $\lambda_{1,2} = \pm 1$, ezek az A sajátértékei.

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. A sajátérték-egyenlet:

$$A\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Innen $x = y$ adódik. $\underline{v}_1$ normált: $1 = |x|^2 + |y|^2 = 2|x|^2$. Ezért egy lehetséges választás $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, azaz egy normált sajátvektor $\lambda_1 = 1$-hez $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. (Van más választási lehetőség is persze...)

Hasonlóan, a $\lambda_2 = -1$-hez tartozó egyik normált sajátvektor $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

7. Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0.

(a) $\det(A) = 1 \cdot 1 - i \cdot (-i) = 1 + i^2 = 0$, tehát A nem invertálható.

(b) $\det(B) = 1 \cdot 2 - i \cdot (-i) = 2 + i^2 = 1$, tehát B invertálható. Az inverzre vonatkozó képlet: $\left(B^{-1}\right)_{ij} = \frac{\hat{B}_{ji}}{\det(B)}$, ahol $\hat{B}_{ji}$ a B mátrix ji-edik eleméhez tartozó előjeles aldetermináns. Azt kapjuk, hogy $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két lineáris transzformáció. Legyen a $\mathcal{C}$ trafó az, hogy $\mathcal{A}$-t és $\mathcal{B}$-t alkalmazzuk egymás után. Ez tényleg lineáris:

$$\mathcal{C}(\underline{u} + \underline{v}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u} + \underline{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u}) + \mathcal{A}(\underline{v})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{u})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \mathcal{C}(\underline{u}) + \mathcal{C}(\underline{v})$$

Itt a 2. egyenlőségnél $\mathcal{A}$, a 3.-nál $\mathcal{B}$ linearitását használtuk ki. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy $\mathcal{C}(\lambda\underline{v}) = \lambda\mathcal{C}(\underline{v})$.

Végig ugyanabban a bázisban dolgozunk. Azt kell megnézni, hogy mi lesz az i-edik bázisvektor képe $\mathcal{C}$ alkalmazása során: $\mathcal{C}(\underline{e}_i) = \sum_j C_{ji}\underline{e}_j$, a C mátrix definíciója szerint. Másrészt

$$\mathcal{C}(\underline{e}_i) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\underline{e}_i)) = \mathcal{B}\left(\sum_k A_{ki}\underline{e}_k\right) = \sum_k A_{ki}\mathcal{B}(\underline{e}_k) = \sum_k A_{ki} \sum_j B_{jk}\underline{e}_j$$
$$= \sum_j \left(\sum_k B_{jk}A_{ki}\right) \underline{e}_j = \sum_j (BA)_{ji}\underline{e}_j$$

Ezt összevetve az első alakkal azt kapjuk, hogy $C = BA$.

9. A standard bázisban dolgozunk. Az $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor képe az $\underline{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ vektor, az $\underline{e}_2$ képe $\underline{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$, így a forgatáshoz tartozó mátrix $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

10. Ha az origó körül α, majd utána egy β szögű forgatást végzünk, akkor az eredmény egy $(\alpha + \beta)$ szögű forgatás. Fordított esetben az eredmény $(\beta + \alpha)$ szögű forgatás, ami természetesen megegyezik az $(\alpha + \beta)$ szögű forgatással.

Mátrixosan ez azt jelenti, hogy $R(\beta)R(\alpha) = R(\alpha+\beta) = R(\alpha)R(\beta)$, ami nem csak azt mutatja, hogy a forgatásmátrixok kommutálnak, hanem ha behelyettesítünk, és elvégezzük a mátrixszorzást, akkor pl. az első sor első elemét kétféleképpen is megkapjuk: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, vagyis az addíciós képletek is kijönnek.

11. Három dimenzióban is forgathatunk valamilyen tengely körül. Ha a z tengely körül forgatunk, akkor az abba az irányba mutató $\underline{e}_3$ vektor képe önmaga: $\underline{e}'_3 = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Az $\underline{e}_1$ vektorból $\cos\alpha\underline{e}_1 + \sin\alpha\underline{e}_2$, azaz $\underline{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ lesz, míg $\underline{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, vagyis a forgatás mátrixa $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lesz.

A $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ \pi \\ -1 \end{pmatrix}$ vektor képe $R(\alpha)\underline{v} = \begin{pmatrix} 4\cos\alpha - \pi\sin\alpha \\ 4\sin\alpha + \pi\cos\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$.

12. A síkon az $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorok is bázist alkotnak.

Mivel $\langle \underline{u}_1 | \underline{u}_2 \rangle = \langle \underline{u}_2 | \underline{u}_1 \rangle = 0$, míg $\langle \underline{u}_1 | \underline{u}_1 \rangle = \langle \underline{u}_2 | \underline{u}_2 \rangle = 1$, így ha az egyenletet balról $\underline{u}_1$-gyel szorozzuk, akkor $\langle \underline{u}_1 | \underline{v} \rangle = \lambda_1$-et kapunk, ahonnan $\lambda_1 = 1/\sqrt{5}$. Ha az eredeti egyenletet $\underline{u}_2$-vel szorozzuk, akkor pedig $\lambda_2 = 12/\sqrt{5}$-öt kapjuk meg.

Az ilyen bázist nevezzük ortonormált bázisnak.