

- Döntsük el, hogy az alábbi  $H$  halmazok a megadott  $*$  műveletekkel csoportot alkotnak-e. Ha igen, akkor azt is döntsük el, hogy Abel-csoport-e (azaz kommutatív-e a csoport).
  - $H = \mathbb{Z}$  (egész számok),  $*$  pedig a szokásos összeadás
  - $H = \mathbb{Z}$  (egész számok),  $*$  a szokásos szorzás
  - $H = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  (racionális számok a 0 kivételével),  $*$  a szokásos szorzás
  - $H = \{3 \times 3\text{-as invertálható valós elemű mátrixok}\}$ ,  $*$  a mátrixszorzás
- Ha  $G$  csoport,  $a, b \in G$  és létezik  $x \in G$ , hogy  $x^{-1}ax = b$ , akkor azt mondjuk, hogy  $a$  és  $b$  konjugáltak. Mutassuk meg, hogy  $a$  konjugált saját magával! (Reflexív tulajdonság.) Azt is igazoljuk, hogy ha  $a$  és  $b$  konjugáltak, akkor  $b$  és  $a$  is konjugáltak (szimmetrikus). Mutassuk meg, hogy ha  $a$  és  $b$  konjugáltak, valamint  $b$  és  $c (\in G)$  is konjugáltak, akkor  $a$  és  $c$  is konjugáltak (azaz ez egy ún. tranzitív tulajdonság).
- Most a  $G = \{1, -1, i, -i\}$  halmazt vizsgáljuk.
  - Igazoljuk, hogy  $H$  a hagyományos szorzással, mint  $*$  művelettel csoportot alkot, írjuk fel a szorzótáblát!
  - Határozzuk meg a csoport egységelemét, és minden elem rendjét.
  - Határozzuk meg a konjugáltosztályokat.
  - Abel-csoport ez a csoport?
  - Mutassunk részcsoportokat  $G$ -ben!
- Mutassuk meg, hogy ha  $G$  Abel-csoport, akkor minden konjugáltosztály egyetlen elemből áll!
  - Mutassuk meg, hogy ha  $G$  véges csoport, akkor egyazon konjugáltosztályba tartozó elemek rendje megegyezik. (Azaz ha  $a, b \in G$  azonos osztályba tartoznak, akkor  $o(a) = o(b)$ .)
- A  $C_{3v}$  pontcsoport szorzótáblája a 2. oldalon található.
  - Mi az egységelem?
  - Kommutatív-e a csoport?
  - Mi a  $\hat{\sigma}_3$  elem inverze?
  - Határozzuk meg az elemek rendjét.
  - Határozzuk meg a konjugáltosztályokat.
- Egy  $G$  csoport ciklikus, ha van olyan  $a \in G$  eleme, hogy  $G$  minden eleme előáll  $a$  alkalmas hatványaként. Ciklikusak-e az alábbi csoportok?
  - a 3. feladatban megadott csoport
  - a  $C_{3v}$  pontcsoport
  - a  $C_3 = \{E, \hat{C}_3, \hat{C}_3^2\}$  pontcsoport

$C_{3v}$	$E$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3^2$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$E$	$E$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3^2$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$
$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3^2$	$E$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$
$\hat{C}_3^2$	$\hat{C}_3^2$	$E$	$\hat{C}_3$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_1$
$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$E$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3^2$
$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{C}_3^2$	$E$	$\hat{C}_3$
$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_3$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	$\hat{C}_3$	$\hat{C}_3^2$	$E$