

- Legyen $|\alpha\rangle$ és $|\beta\rangle$ két normált, egymásra merőleges vektor. Segítségükkel definiálunk három operátort: $\hat{s}_x = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha|)$, $\hat{s}_y = \frac{i}{2}(-|\alpha\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle\alpha|)$ és $\hat{s}_z = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\beta\rangle\langle\beta|)$. Adjuk meg mind a három operátor mátrixát az $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ bázison!
- Mutassuk meg, hogy $[\hat{s}_x, \hat{s}_y] = i\hat{s}_z$. **HF:** Számítsuk ki az $[\hat{s}_y, \hat{s}_z]$ és az $[\hat{s}_z, \hat{s}_x]$ kommutátort is!
- Hermitikus-e a $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ operátor az $L^2[-\infty, \infty]$ téren? Mi a helyzet a $i\frac{d}{dx}$ operátorral?
- Hogyan definiálnánk az $L^2[a, b]$ téren két függvény távolságát? Pl. mennyi az $L^2[-2, 2]$ tér két elemének, az $f(x) = x$ és a $g(x) = x^2$ függvényeknek a távolsága?
- Tegyük fel, hogy a $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ Hilbert-téren az $\{f_k\}$ rendszer ONB. Ekkor egy $g \in H$ vektor felírható, mint az f_k vektorok lineáris kombinációja: $g = \sum_k c_k f_k$, ahol c_k -k az együtthatók. Hogyan határozható meg c_k ?
- Fejtsük Fourier-sorba az $f(x) = x$ függvényt a $[-2, 2]$ intervallumon!
- Fejtsük komplex Fourier-sorba a $[-\pi, \pi]$ intervallumon az alábbi f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

- Számítsuk ki a Dirac-delta Fourier-transzformáltját!
- Az $L^2[0, 2\pi]$ tér elemei az alábbi ON rendszert alkotó függvények: $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$; $\phi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x)$; $\phi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x)$; $\phi_5(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x)$. Adjuk meg a $g(x)$ függvény kifejtését a $\{\phi_i\}_{i=1}^5$ függvények segítségével, ha $g(x)$ a következő:

$$g(x) = \begin{cases} \vdots \\ x + 3\pi, & \text{ha } -4\pi < x \leq -2\pi \\ x + \pi, & \text{ha } -2\pi < x \leq 0 \\ x - \pi, & \text{ha } 0 < x \leq 2\pi \\ x - 3\pi, & \text{ha } 2\pi < x \leq 4\pi \\ x - 5\pi, & \text{ha } 4\pi < x \leq 6\pi \\ \vdots \end{cases}$$