# 2 Koordinátarendszerek és transzformációik

## 2.1 Bevezetés

Ha valamilyen vektorokkal jellemezhető fizikai vagy kémiai folyamatot akarunk leírni, a vektorokhoz általában egy szám $n$-est rendelünk hozzá. Ennek a szám $n$-esnek az alakja attól függ, hogy a vektor leírásához milyen koordinátarendszert használunk. Az előző fejezetben az *ortogonális koordinátarendszer*rel ismerkedtünk meg, ennek egy speciális formája az *ortonormált koordinátarendszer*, amelyben az egyes vektorok nemcsak merőlegesek egymásra, de a hosszúságuk is egységnyi. Ez a leggyakrabban használt koordinátarendszer. Az ortogonális rendszerekre jellemző, hogy bennük bármely vektor bármely koordinátája a vektor lineáris függvénye és a bázisvektorok bármely ortogonális (komplex esetben unitér) transzformációja újabb ortogonális bázist ad. (Ez azért van így, mert - ahogy az előző fejezet egyik feladatában beláttuk - ortogonális transzformációk nem változtatják meg a skaláris szorzást, azaz minden távolságot ill. szöget helyben hagynak. Másképp mondva az ortogonális transzformációk *izometrikus*ak.)
Ha egy ortogonális bázis vektorait egyenként lineáris transzformációnak vetjük alá, de ezen transzformációk nem írhatók le egyetlen ortogonális transzformációval, akkor az eredményül kapott koordinátarendszert *ferdeszögű* koordinátarendszernek nevezzük. Ebben az esetben még mindig igaz, hogy a vektorok koordinátái az egyes vektorok lineáris függvényei.
Ha egy ortogonális rendszer bázisvektorait úgy transzformáljuk, hogy azok között van legalább egy nemlineáris transzformáció, akkor a kapott koordinátarendszer *görbevonalú*. Ebben az esetben a koordináták legalább egyike nem írható fel a vektor lineáris függvényeként.

## 2.2 Ortogonális koordinátarendszerek

### 2.2.1 Az ortogonális (unitér) transzformációk jelentése és mátrixa

Egy háromdimenziós térben nem nehéz felismerni, hogy mely transzformációk izometrikusak. Ugyanis, ha a skaláris szorzat nem változik meg a transzformáció során, akkor a vektorok hossza sem. Tekintsünk egy az origóból kifele mutató vektort és hattassunk rá egy ortogonális transzformációt. A vektor egy ugyanolyan hosszú, de más irányba mutató vektorba megy át. Ez tehát azt jelenti, hogy a vektort forgattuk vagy tükröztük (vagy mindkettő). Tehát az ortogonális transzformációk forgatásnak, tükrözésnek vagy tükrözéses forgatásnak felelnek meg.
Vizsgáljuk meg egy ortogonális transzformáció determinánsát. Tudjuk, hogy $OO^\dagger = I$. Vegyük mindkét oldal determinánsát és használjuk fel, hogy $\det O^\dagger = \det O$, amiből: $(\det O)^2 = 1$. Tehát két megoldás van: $\det O = 1$ vagy $\det O = -1$. Az első esetben *valódi forgatás*ról, a második esetben *tükrözéses forgatás*ról van szó.

---

2.2.1. (A) Mit mondhatunk egy unitér transzformáció determinánsáról?

---

Vizsgáljuk meg ezek után egy ortogonális mátrix elemeinek összefüggéseit egy kétdimenziós példán:

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.2.1.}$$

Tudjuk, hogy $OO^\dagger = I$ és $O^\dagger O = I$. Ebből a következő egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ a^2 + c^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0 \\ b^2 + d^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.2.}$$

Figyeljük meg, hogy a mátrix soraiból és oszlopaiból alkotott vektorok ortonormáltak, azaz legyenek az oszlopok $o_1 = (a, c)$, $o_2 = (b, d)$, a sorok pedig $s_1 = (a, b)$ és $s_2 = (c, d)$. Ekkor igaz, hogy $< o_i, o_j >= \delta_{ij}$ és $< s_i, s_j >= \delta_{ij}$[1].
Legyen $a = \cos\phi$, ahol $\phi$ egyelőre egy közelebbről meg nem határozott mennyiség. Ekkor a 2.2.2. egyenletrendszer első egyenletét úgy lehet csak kielégíteni, ha $b = \sin\phi$, vagy $b = -\sin\phi$. Hasonló igaz $c$-re is, amiből viszont az következik, hogy $d$ nem lehet más csak $\cos\phi$, vagy $-\cos\phi$. Felhasználva az előbb levezetett összefüggést, miszerint $\det O = ad - bc = 1$, a valódi forgatások esetén, adódik, hogy a cos-t tartalmazó tagok előjele meg kell, hogy egyezzen, míg a sin-os tagok előjelének különböznie kell. Ez alapján két dimenzióban az alábbi két forgatási mátrix képzelhető el[2]:

[1] Itt a skaláris szorzást a 2D vektortól való megkülönböztetésképpen a $<,>$ jellel jelöltük.
[2] Természetesen kiindulhattunk volna abból is, hogy $a = \sin\phi$. Ez nem jelent elvileg különböző megoldást, hiszen a sin és a cos függvények egymás eltoltjai.

$$O(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\quad O'(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\tag{2.2.3.}$$

Látható, hogy $O'(\phi)=O(-\phi)=O^\dagger(\phi)=O^{-1}(\phi)$. Ez a két transzformáció tehát egymás inverze.

---

2.2.2. (A) Lássuk be, hogy $O(\phi+\psi)=O(\phi)O(\psi)$!

2.2.3. (A) Bizonyítsuk, hogy $O(0)=O(2\pi)=I$ és $O(\pi)=-I$!

---

A fenti feladatok eredménye alapján már gyanítható, hogy $\phi$ nem más, mint a forgatás szöge. Ellenőrzésképpen forgassuk el a kétdimenziós $(x_1,0)$ vektort $\phi$ szöggel. Az eredmény egy $(x_2,y_2)$ vektor, ahol $x_2=x_1\cos\phi$ és $y_2=x_1\sin\phi$. Ebből látható, hogy a $\phi$ szögű elforgatást az $O$-val jelölt mátrix írja le, míg $O'$ a visszafelé történő forgatást $(-\phi)$, vagy másképpen: a vektor helyett a koordinátarendszer elforgatását.

---

2.2.4. (A) Adjuk meg az $(1,2)$ vektor $60°$-os elforgatottját!

2.2.5. (A) Legyen $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Forgassuk el a 2D $f_1=e_1+e_2$ és az $f_2=e_1-e_2$ vektorokat $45°$ fokkal!

2.2.6. (A) Határozzuk meg az $O$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

2.2.7. (A) Hány eleme van az $SO(2)$ csoportnak? Kommutatív-e ez a csoport?

---

Három dimenzióban a forgatások leírása lényegesen bonyolultabb. A kétdimenziós esettel szemben itt három paraméter határozza meg a forgatást. Egy lehetséges megadási mód az, hogy rögzítjük a forgástengelyt annak egységvektorával $(n)$ és megadjuk az e tengely körüli forgatás szögét. Ez látszólag négy számot jelent $(n_1,n_3,n_3,\phi)$, de mivel $n$ egységvektor, ezért a szabad paraméterek száma eggyel csökken. Belátható, hogy ezen számok ismeretében a 3D forgásmátrix a következőképpen írható:

$$O(n,\phi)=\cos\phi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-\cos\phi)\begin{pmatrix}n_1^2&n_1n_2&n_1n_3\\n_2n_1&n_2^2&n_2n_3\\n_3n_1&n_3n_2&n_3^2\end{pmatrix}+\sin\phi\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}\tag{2.2.4.}$$

Egy 3D forgatás azonban felbontható három forgatás szorzatára is. Egy 3D forgatás hat különböző módon bontható (három darab) két különböző tengely körüli forgatásra és ugyancsak hat különböző módon bontható fel (három darab) három különböző tengely körüli forgatás szorzatára. Általában elmondható, hogy az alkalmazási terület határozza meg, hogy melyik felbontást használjuk. A következő felbontáshoz tartozó szögeket *Euler-szög*eknek nevezik:

$$O(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{2.2.5.}$$

---

2.2.8. (B) Forgassuk el a metánmolekulát az egyik $C-H$-tengely körül $30°$-kal! Legyen a szénatom a koordinátarendszer origójában!

2.2.9. (B) Lássuk be, hogy $O^2(n,\phi)=O(n,2\phi)$!

---

A forgatás nélküli, tisztán (egyszeres) tükrözéseket leíró mátrixok abban különböznek csak az egységmátrixtól, hogy a tükrözési tengely által meghatározott helyen 1 helyett $-1$ áll. Ez könnyen látható abból, hogy egy $\sigma_i$ tükrözést kétszer alkalmazva visszakapjuk az egységmátrixot: $\sigma_i^2=I$, azaz $\sigma_i=\sigma_i^{-1}$. Ha egy koordinátarendszer minden egységvektorát ellentétes irányúra változtatjuk, *inverzió*ról beszélünk. Az inverzió két dimenzióban nem más, mint $180°$-os forgatás (tessék ellenőrizni!). Három dimenzióban azonban az inverzió nem más, mint a jobbsodrású (a jobbkezünk ujjainak megfelelő) koordinátarendszer váltása a balsodrásúba (bal kéz) és viszont.

---

2.2.10. (B) *Királis*nak nevezünk egy objektumot, ha az (saját terén belüli) forgatással nem hozható fedésbe a tükörképével. Van e két dimenzióban kiralitás? (Útmutatás: gondoljunk a Tetris nevű játékra!)

2.2.11. (B) Páros dimenziójú terekben az inverzió mindig helyettesíthető forgatással, míg páratlan dimenziójú térben ez nem igaz. Miért?

---

A „valódi" (3D) fizikai vektorok (mint a helyvektor, vagy az impulzus) inverzió hatására előjelet váltanak. Ezek az ún. *polárvektor*ok. Két polárvektor vektoriális szorzata ebből következően viszont nem vált előjelet, ezek ún. *axiál-* vagy *pszeudo*vektorok, pl. az impulzusmomentum: $L=r\times p$. Két polárvektor vagy két axiálvektor skaláris szorzata nem változik inverzió hatására - ezek az „igazi" skalárok. Egy polár és egy axiálvektor skaláris szorzata viszont előjelet vált inverzió hatására, ezek a *pszeudoskalár*ok. A fizikai egyenletek mindig azonos természetű vektorok és skalárok között teremtenek kapcsolatot.

### 2.2.2 Mátrixok transzformációja

Ha egy vektortér vektorai a különböző koordinátarendszerekben más koordinátákat vesznek fel, akkor a lineáris leképezések mátrixainak is hasonlóképpen kell viselkedniük. Legegyszerűbben ez a tenzoriális szorzat mátrixon látható, hiszen annak egyes elemei a vektorkoordináták megfelelő szorzatai.
Egy $A$ lineáris transzformáció egy $v$ vektort $w$-be transzformál. Ugyanaz a lineaáris transzformáció $v$ elforgatottját, $Ov$-t $Ow$-be viszi, tehát:

$$\begin{aligned} Av &= w \\ AOv &= Ow \end{aligned} \tag{2.2.6.}$$

A második egyenletből látható, hogy az $A$ mátrix írja le a leképezést az eredeti bázisban és az $OAO^{-1}$ írja le az elforgatott bázisban, hiszen:

$$(OAO^{-1})Ov = Ow \tag{2.2.7.}$$

Ez azt jelenti, hogy a koordinátarendszer forgatásával az $A$ mátrix a hasonlósági transzformáltjába megy át. Elevenítsük fel, hogy egy $A$ mátrix sajátértékproblémája az $AX = X\Lambda$ alakban írható. Ha $A$ szimmetrikus mátrix (igazából elég, ha normálmátrix) akkor sajátvektorainak mátrixa (a *modális mátrix*) ortogonális. Ebben az esetben $\Lambda = X^\dagger AX = X^{-1}AX$. Ez azt jelenti, hogy az $A$ mátrix modális mátrixával, mint ortogonális transzformációval végzett hasonlósági transzformációval diagonális alakra hozható. Másképpen: egy $A$ szimmetrikus lineáris transzformáció sajátvektorai bázisán diagonális.

### 2.2.3 Projekciók

Ortonormált rendszerben könnyű elvégezni a koordinátatengelyekre vett *vetítések*et, más néven *projekció*kat. Például egy

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektornak az első ($x$) tengelyre vett projekciójának eredménye:

$$P^{(1)}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.8.}$$

Ez a transzformáció tehát eltünteti a vektor többi komponensét. $P^{(i)}$-t az $i$-edik *kanonikus projekció*nak is szokták nevezni. Látható, hogy a $P^{(1)}$ projekció mátrixa:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.9.}$$

Ez a mátrix előállítható a megfelelő irányú egységvektor önmagával vett tenzoriális szorzataként: $P^{(1)} = e_1 \circ e_1$. Általános esetben is $P^{(i)} = e_i \circ e_i$. Alkalmazhatjuk az előző fejezetben a skaláris és a tenzoriális szorzatra bemutatott vegyes asszociativitást: $P^{(i)}v = (e_i \circ e_i)v = e_i(e_i, v) = e_i v_i$. Tehát sejtésünk alapján igazoltuk, hogy minden $e_i \circ e_i$ típusú mátrix megvalósítja az $i$-edik kanonikus projekciót.
Azt sem nehéz belátni, hogy ${P^{(i)}}^2 = P^{(i)}$, azaz egy projekció *idempotens* (négyzete megegyezik önmagával). Ehhez csak újra fel kell használni a vegyes asszociativitást: $e_i \circ e_i \cdot e_i \circ e_i = e_i \circ (e_i, e_i)e_i = e_i \circ e_i$. Ez nem meglepő, hiszen ha kétszer egymás után ugyanarra a tengelyre vetítünk egy vektort, akkor a második vetítés már nem fogja megváltoztatni az első hatását. Ezért a projekciók koordinátarendszertől független definiálása: $P$ projekció, ha idempotens.
Abban az esetben, ha a háromdimenziós tér egy pontját nem egy tengelyre, hanem egy síkra akarjuk leképezni, akkor egy síkra történő projekciót kell használni. Például az első ($x$) és a második ($y$) tengely által meghatározott sík esetén a $P^{(12)}$ projekció hatása a következő:

$$P^{(12)}v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.10.}$$

Könnyen látható, hogy

$$P^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.11.}$$

Ez viszont felírható a két projekció összegeként: $P^{(12)} = P^{(1)} + P^{(2)}$. Ortonormált bázisvektorok esetén tehát a $\sum_i e_i \circ e_i$ mátrix projekciót ír le.

---

2.2.12. (A) Oldjuk meg a $P^{(1)}$ és a $P^{(12)}$ projekciók sajátértékproblémáját!

2.2.13. (A) Adjuk meg a $P^{(1)}$ és a $P^{(12)}$ projekciók inverzét!

2.2.14. (B) Igazoljuk, hogy ortogonális (de nem ortonormált) rendszerben a projekció általános képlete $\sum_i \frac{e_i \circ e_i}{(e_i, e_i)}$

---

## 2.3 Ferdeszögű koordinátarendszerek

### 2.3.1 Az átfedési mátrix

Ortonormált koordinátarendszerek esetén $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Ez nem marad igaz ferdeszögű rendszerekre. Legyenek $e_i$ és $e_j$ egy tetszőleges rendszer ferdeszögű bázisvektorai. Ekkor az $S_{ij} = (e_i, e_j)$ mátrixot ***átfedési mátrix***nak nevezzük. Legyen $E$ a ferdeszögű bázisvektorokból felépített mátrix, ahol a mátrixot úgy építjük fel, hogy az egyes $e_i$ vektorok $E$ oszlopai legyenek. Ekkor $S = E^\dagger E = (EE^\dagger)^\dagger$.

---

2.3.1. (A) Legyen $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$. Mi a koordinátarendszer átfedési mátrixa?

---

Ferdeszögű koordinátarendszerekben az ortogonális rendszerekben megtehető egyszerűsítések többsége nem érvényes. Például ortonormált rendszerben egy $v$ vektor bázisvektorok szerinti $v = \sum_i v_i e_i$ sorfejtéséből $e_j$-vel való szorzással a $v_j$ koordináta meghatározható: $(v, e_j) = \sum_i v_i (e_i, e_j) = \sum_i v_i \delta_{ij} = v_j$. Nem így a ferdeszögű rendszerekben.

---

2.3.2. (A) Ferdeszögű rendszer alkalmazásakor mivel egyenlő $(v, e_j)$?

---

### 2.3.2 Ortogonalizációs eljárások

A fent ismertetett kényelmetlenség kezelésére alapvetően két megoldás létezik. Az egyik az, hogy az $\{e_i\}$ bázis mellé definiálunk egy $\{\tilde{e}_i\}$ bázist, amelyre igaz, hogy $(e_i, \tilde{e}_j) = \delta_{ij}$. Így két bázisa lesz a vektortérnek, azaz minden vektort kétfajta koordináta $n$-essel adhatunk meg. Az egyiket a vektor ***kovariáns***, a másikat ***kontravariáns*** ábrázolásának nevezzük. Ezzel a megoldással a továbbiakban nem foglalkozunk.
A másik módszer az, hogy az eredetileg nem ortogonális bázisvektorokat valamilyen módszerrel ortogonálissá tesszük (***ortogonalizáljuk***). Az egyik ilyen módszer a ***szimmetrikus*** (vagy ***Löwdin-féle***) ortogonalizálás. Ebben az esetben az új $f_i$ ortogonális bázisvektorokat a következőképpen kapjuk meg. Legyen $F = S^{-1/2}E^\dagger$. Ekkor F oszlopai (az $f_i$ vektorok) ortonormált rendszert alkotnak ($S' = F^\dagger F = I$)[3]. Ez akkor is igaz, ha az eredeti vektorok még csak normálva sem voltak! Például $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 1)$. Ekkor az $E$ mátrix a következőképpen néz ki:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ebből az $S$ mátrix ($S = E^\dagger E$), és az $S^{-1/2}$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad S^{-1/2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ebből pedig:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz $f_1 = (0, 1)$, $f_2 = (1, 0)$. A másik gyakran alkalmazott módszer neve *Gram-Schmidt*, vagy *szukcesszív* ortogonalizálás. Ebben az esetben egy $n$-dimenziós tér esetén a következő algoritmust követjük:

[3]Ellenőrzés: $S' = F^\dagger F = ES^{-1/2}S^{-1/2}E^\dagger = ES^{-1}E^\dagger$. Ha $S = E^\dagger E$, akkor $S^{-1} = (E^\dagger E)^{-1}$. Felhasználva az előző fejezetben az inverzképzésről tanultakat: $S^{-1} = E^{-1}(E^\dagger)^{-1}$. Behelyettesítve: $S' = EE^{-1}(E^\dagger)^{-1}E^\dagger = I$, azaz az új vektorok valóban ortonormáltak.

$$\begin{aligned}
f_1 &= e_1 \\
f_2 &= (I - Q^{(1)})e_2 = e_2 - Q^{(1)}e_2 = e_2 - \frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} f_1 \\
f_3 &= (I - Q^{(1)} - Q^{(2)})e_3 = (I - Q^{(12)})e_3 = e_3 - Q^{(1)}e_3 - Q^{(2)}e_3 = e_3 - \frac{(f_1, e_3)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(f_2, e_3)}{(f_2, f_2)} f_2 \\
&\dots \\
f_i &= (I - \sum_{j=1}^{i-1} Q^{(i)})e_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(f_j, e_i)}{(f_j, f_j)} f_j
\end{aligned} \tag{2.3.12.}$$

Itt $Q^{(i)} = \dfrac{f_i \circ f_i}{(f_i, f_i)}$, azaz az új bázisvektorokból alkotott projektor. ($Q^{(1)} = P^{(1)}$) Ebben az esetben tehát az egyes nemortogonális bázisvektorokból sorra kivetítjük azokat a komponenseket, amelyek átfedést adnának az előzőleg elkészített (már ortogonalizált) bázisvektorokkal. Ellentétben a szimmetrikus ortogonalizációval, itt függ az eredmény attól, hogy mely vektort tekintettük kiindulásul (az meg sem változik) és melyekkel folytattuk az eljárást. Még egy fontos különbség a szimmetrikus ortogonalizációhoz képest, hogy itt az új vektorok még akkor sem lesznek feltétlenül normáltak, ha a régiek azok voltak!

Az előző példához hasonlóan itt is induljunk ki az $e_1 = (1, 2)$ és az $e_2 = (2, 1)$ vektorokból. Választhatunk, hogy melyik vektort hagyjuk változatlanul, legyen ez $e_1$. Ekkor tehát $f_1 = e_1$. $Q^{(1)}$ nem más, mint az $f_1$-ből (azaz $e_1$-ből) felépített projektor: $Q^{(1)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ahol az $\frac{1}{5}$ faktor abból adódik, hogy az $e_1$ vektor nem normált (lásd 2.2.14. feladat). $f_2$-re így a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$f_2 = (I - Q^{(1)})e_2 = e_2 - Q^{(1)}e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{2.3.13.}$$

Ez persze nem lesz egy normált vektor, a megfelelő normált vektorok: $f_{1n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$ és $f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$.

---

2.3.3. (A) Végezzük el az előbbi GS-ortogonalizációt úgy, hogy $e_2$-t hagyjuk változatlanul ($f_1 = e_2$) és $e_1$-t ortogonalizáljuk hozzá! Normáljuk a kapott vektorokat!

2.3.4. (A) Igazoljuk, hogy két nem ortogonális, de normált $e_1$ és $e_2$ vektor esetén az $e_1 + e_2$ és az $e_1 - e_2$ vektorok ortogonálisak!

2.3.5. (B) Lássuk be, hogy a GS-ortogonalizációval kapott vektorok valóban ortogonálisak!

2.3.6. (B) Legyen $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (2, 1, 1)$, $e_3 = (1, 3, 0)$. Ortogonalizáljuk a vektorokat GS-ortogonalizációval! Ismerjük be, hogy a feladat jóval nehezebb lett volna szimmetrikus ortogonalizációval! Normáljuk a kapott vektorokat!

---

## 2.4 Görbevonalú koordinátarendszerek

### 2.4.1 A síkbeli polárkoordinátarendszer

A sík egy pontját nem csak az $x$ és $y$ koordinátájának megadásával lehet jellemezni, hanem annak a koordinátarendszer kezdőpontjától való távolságával ($\rho$) és pl. az $x$ tengellyel bezárt szöggel ($\phi$). Ekkor $\rho$ könnyen megadható, mint $x$ és $y$ függvénye: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\phi$ meghatározása egy kicsit összetettebb:

$$\phi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & \text{ha } x < 0 \\[2ex] \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{ha } x > 0 \\ \pi/2 & \text{ha } x = 0 \text{ és } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{ha } x = 0 \text{ és } y < 0 \\ \text{határozatlan} & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

Visszafelé pedig: $x = \rho \cos \phi$ és $y = \rho \sin \phi$. Megváltoznak az egyes koordináták értelmezési tartományai is, hiszen $\rho \geq 0$ és $-\pi < \phi \leq \pi$. Síkbeli polárkoordinátarendszerben, ahogy általában görbevonalú rendszerekben, nem szokás az átfedési mátrixszal dolgozni, a görbevonalú koordinátarendszereket az ún. *metrikus mátrix* jellemzi, amelynek felépítéséhez azonban a többváltozós differenciálás ismerete szükséges, ezért itt nem tárgyaljuk.

Egy koordinátarendszert jellemeznek azok a görbék (felületek), amelyeket úgy kapunk, hogy az egyik koordinátát rögzítjük, a többit pedig engedjük változni. Például ortonormált rendszer (Descartes koordináták) esetén az $x = const$ mellett az $y$ által meghatározott „görbék” az $y$ tengellyel párhuzamos egyenesek (hasonlóképpen az $y = const$ mellett az $x$ által meghatározott görbék az $x$ tengellyel párhuzamos egyenesek). Ezeket a görbéket *szintvonalaknak* nevezzük. Síkbeli polárkoordinátarendszer esetén az $\rho = const$ által meghatározott görbék az origó köré írt koncentrikus körök, míg a $\phi = const$ szerintiek az adott irányszögű félegyenesek.

---

2.4.1. (A) Adjuk meg az $(1, 3)$ Descartes koordinátákkal megadott vektor polárkoordinátáit!

2.4.2. (A) Adjuk meg az $(2, -\pi/2)$ polárkoordinátákkal megadott vektor Descartes koordinátáit!

2.4.3. (B) Igazoljuk, hogy polárkoordinátákban két pont távolsága felírható a következőképpen:
$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)}$!

---

### 2.4.2 Térbeli görbevonalú koordinátarendszerek

Az alábbiakban tételesen felsoroljuk a gyakrabban alkalmazott térbeli görbevonalú koordinátarendszerek definícióit.
A legegyszerűbben elképzelhető rendszer a *hengerkoordinátarendszer*. Itt a térbeli Descartes koordináták $(x, y, z)$ $z$ koordinátáját meghagyjuk az új rendszer harmadik koordinátájának, a két első ($x$ és $y$) koordinátákra pedig a síkbeli polárkoordinátarendszer képleteit alkalmazzuk. Azaz az $(\rho, \phi, z)$ hengerkoordinátarendszer transzformációs képletei:

$$\begin{array}{ccc} x = \rho\cos\phi & y = \rho\sin\phi & z = z \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{\rho} & \text{ha } x > 0 \end{array} \qquad (2.4.14.)$$

A $\phi$-vel kapcsolatos szétválasztás a síkbeli polárkoordinátarendszernél leírtakkal megegyezik. Ebben a rendszerben a *szintfelület*ek a következők: az $\rho = const$ sugarú hengerfelületek, a $z$ tengelytől kiinduló $\phi = const$ félsíkok és a $z$ tengelyre merőleges $z = const$ síkok.

---

2.4.4. (A) Adjuk meg az $(1, 2, 5)$ Descartes koordinátákkal megadott vektor hengerkoordinátáit!

2.4.5. (A) Adjuk meg az $(1, -3\pi/4, -2)$ hengerkoordinátákkal megadott vektor Descartes koordinátáit!

2.4.6. (A) Milyen határok közt változhatnak az egyes hengerkoordináták?

---

A térbeli polárkoordinátarendszerendszerek egy másik gyakori típusa a térbeli polárkoordinátarendszer (*gömbi koordinátarendszer*). Ennek koordinátái a pont origótól vett $\rho$ távolsága, a $z$ tengely és az $r$ helyvektor közötti $\theta$ szög és az $x$ tengely és az $r$ helyvektor $x, y$ síkra vett vetülete közti $\phi$ szög: $(\rho, \theta, \phi)$. Az egyes koordináták a következő határok közt változhatnak: $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $-\pi < \phi \le \pi$. A megfelelő transzformációs képletek:

$$\begin{array}{ccc} x = \rho\sin\theta\cos\phi & y = \rho\sin\theta\sin\phi & z = \rho\cos\phi \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \phi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \quad \text{ha } x > 0 \end{array} \qquad (2.4.15.)$$

A $\phi$-vel kapcsolatos szétválasztás a fentiekkel megegyező. Hasonló a helyzet $\theta$-val kapcsolatban is. A gömbi koordinátarendszer fontos szintfelületei $\rho = const$ koncentrikus gömbök (egy ilyen konstans sugarú gömb a Föld, ahol a két szög - hosszúsági és szélességi koordináták - meghatározzák a pont helyét a felszínen.)

---

2.4.7. (A) Adjuk meg az $(1, 2, 5)$ Descartes koordinátákkal megadott vektor gömbi koordinátáit!

2.4.8. (A) Adjuk meg az $(1, 3\pi/4, \pi/2)$ gömbi koordinátákkal megadott vektor Descartes koordinátáit!

2.4.9. (C) Mik a gömbi koordinátarendszer $\theta = const$ és $\phi = const$ által megadott szintfelületei?

2.4.10. (B) Adjuk meg a henger és a gömbi koordináták közti átváltásokat!

---

*Elliptikus koordinátarendszer*t határoz meg két (adott $R$ távolságra levő) rögzített pont a térben ($F_1$ és $F_2$)[4]. Legyenek ezek a pontok egy Descartes koordinátarendszer $z$ tengelyén úgy, hogy $F_1$ $xy$ síkra vett tükörképe legyen $F_2$. (Az $F_1$ és $F_2$ pontokat a rendszer *fókusz*ainak nevezzük.) Legyen a vizsgált pont $F_1$-hez viszonyított távolsága $\rho_1$, $F_2$-től pedig legyen $\rho_2$ távolságra. Legyen ezen kívül $\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ az előzőekben megszokott módon (vagyis a $z$ tengely „körüli" szög). Ekkor a $(\rho_1, \rho_2, \phi)$ koordináták elliptikus koordinátarendszert határoznak meg. Az első két koordináta a $[0, \infty)$ határokon belül változhat, azonban $\rho_1 + \rho_2 > R$-nek teljesülnie kell a háromszögegyenlőtlenség miatt.
Ez a koordinátarendszer különbözik gömbi és a hengerkoordinátarendszertől abban, hogy a koordinátavonalak itt nem merőlegesen találkoznak: gondoljunk arra, hogy a $\rho_1 = const$ és a $\rho_2 = const$ felületek az $F_1$ ill. az $F_2$ körüli gömbök. (Ezek metszésvonala egy körvonal, ezen belül határozza meg a keresett pont helyét a $\phi$ szög.) A két gömbfelület találkozásánál vett érintősíkok nem merőlegesek. A gömbfelületek helyett új felületeket definiálnak a $\mu = \frac{\rho_1 + \rho_2}{R}$ és a $\nu = \frac{\rho_2 - \rho_1}{R}$ új koordináták által meghatározott szintfelületek: a $\mu = const$ ellipszoidok és a $\nu = const$ hiperboloidok. Ezek a felületek már merőlegesen találkoznak. (Ez látható a 2.3.4. feladat megoldásából is.) Az elliptikus koordináták kiszámítása a Descartes koordinátákból egyszerű koordinátageometriai feladat. Be lehet látni, hogy a Descartes koordináták az elliptikus koordinátákból megkaphatók, mint:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{R}{2}\sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)}\cos\phi \\
y &= \frac{R}{2}\sqrt{(\mu^2 - 1)(1 - \nu^2)}\sin\phi \\
z &= \frac{R}{2}\mu\nu
\end{aligned}
\tag{2.4.16.}
$$

---

**2.4.11.** (A) Adjuk meg az $(1, 2, 5)$ Descartes koordinátákkal megadott vektor $(\mu, \nu, \phi)$ elliptikus koordinátáit, ha $F_1 = (0, 0, 2)$ és $F_2 = (0, 0, -2)$!

**2.4.12.** (A) Adjuk meg az $(5, 7, \pi/4)$ ($\rho_1, \rho_2$-típusú) elliptikus koordinátákkal megadott vektor Descartes koordinátáit, ha $F_1$ és $F_2$ megegyezik az előző feladatban megadottakkal!

---

[4] Az itt vázolt koordináták másik neve nyújtott szferoidikus koordináták.

## 2.5 Megoldások

### 2.5.2 Ortogonális koordinátarendszerek

2.2.1. Egységnyi abszolút értékű komplex szám.

2.2.2.

$$\begin{aligned} O(\phi+\psi) &= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi-\sin\psi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\psi+\sin\psi\cos\phi & \cos\phi\cos\psi-\sin\phi\sin\psi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = O(\phi)O(\psi) \end{aligned} \tag{2.4.17.}$$

2.2.3.

$$O(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{2.4.18.}$$

A sin és a cos függvények $2\pi$ szerint periodikusak, tehát $O(2\pi) = I$.

$$O(\pi) = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \tag{2.4.19.}$$

2.2.4. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$

2.2.5. $O(45°)(e_1+e_2) = \sqrt{2}e_2 \qquad O(45°)(e_1-e_2) = \sqrt{2}e_1$.

2.2.6. $\lambda_{1,2} = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1}$, és mivel $|\cos\phi| < 1$, ezért $\lambda_{1,2} \in \mathbf{C}$. A sajátértékek komplexek, a valós térben nincsen sajátérték és sajátvektor. Ez annyit jelent, hogy nem lehet felvenni olyan vektort, ami önmaga számszorosába megy át forgatáskor (kivéve természetesen a nullvektort). Ez összhangban áll a forgatásról kialakított képpel, hiszen minden vektor elfordul forgatáskor, kivéve a nullvektort.

2.2.7. Folytonosan végtelen sok. Igen, kommutatív, lásd 2.2.2. feladat.

2.2.8. A metánmolekula egy olyan tetraédernek feleltethető meg, amelynek középpontjában ül a szánatom, a tetraéder csúcsain pedig a hidrogénatomok. A tetraéder viszont kockába írható, ezért az egyes atomok koordinátái könnyen felírhatóak. Legyen az egység a $C-H$ kötéshossz. Ekkor:

| | x | y | z |
|---|---|---|---|
| C | 0 | 0 | 0 |
| H1 | 1 | -1 | 1 |
| H2 | 1 | 1 | -1 |
| H3 | -1 | 1 | 1 |
| H4 | -1 | -1 | -1 |

A $C-H1$ tengely körüli forgatáshoz tartozó normálvektor :$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

$$O(n,\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.9. Ez nem más. mint két, egymás utáni forgatás egy adott tengely körül. Erről beláttuk, hogy ugyanaz, mint egy kétszeres forgatás ugyanazon tengely körül (lásd 2.2.2. feladat).

2.2.10. Van kétdimenziós kiralitás. Gondoljunk egy L betűre és egy fordított L betűre. A síkon belüli forgatással ezek nem hozhatók fedésbe. Természetesen egy dimenzióval nagyobb forgatást megengedve - térbeli forgatással - a két objektum fedésbe hozható.

2.2.11. Az inverzió mátrixa $-I$. Ennek determinánsa $-1$-egy szorzatából áll. Ha ezek száma páros, akkor $(-1)^{2n} = 1$, tehát valódi forgatásról van szó. Ellenkező esetben $(-1)^{2n+1} = -1$, tehát tükrözéses forgatásról.

2.2.12. A karakterisztikus egyenlet $P^{(1)}$-re: $\lambda^2(1-\lambda) = 0$. Ennek egyetlen nem nulla gyöke van: $\lambda_1 = 1$. A normált sajátvektor az $(1,0,0)$ vektor. $P^{(12)}$ esetében két nem zérus gyök található $\lambda_{1,2} = 1$ Itt a teljes $(x,y,0)$ vektorokból álló altér a sajátaltér. Ennek a triviális ortogonális bázisa $(1,0,0)$ és $(0,1,0)$.

2.2.13. Mindkét mátrix determinánsa 0, ezért nem létezik inverz. Ennek az az értelme, hogy ha pl. egy sík vektorait az $x$ tengelyre vetítjük, akkor minden $(x, y)$ vektor képe az $(x, 0)$ vektor lesz. Ennek a vetítésnek az inverzének az $(x, 0)$ vektorokból kellene visszaállítani az $(x, y)$ vektorokat. Mivel ezekből (folytonosan) végtelen sok van, ez nem lehetséges.

2.2.14.

$$P^2 = \sum_i \frac{e_i \circ e_i}{(e_i, e_i)} \sum_j \frac{e_j \circ e_j}{(e_j, e_j)} = \sum_{ij} \frac{e_i \circ e_i \; e_j \circ e_j}{(e_i, e_i)(e_j, e_j)} = \sum_{ij} \frac{e_i \circ (e_i, e_j) e_j}{(e_i, e_i)(e_j, e_j)} = \sum_{ij} \delta_{ij} \frac{(e_i, e_j) e_i \circ e_j}{(e_i, e_i)(e_j, e_j)} = \sum_i \frac{e_i \circ e_i}{(e_i, e_i)} \tag{2.4.20.}$$

### 2.5.3 Ferdeszögű koordinátarendszerek

2.3.1. $S = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

2.3.2. $(v, e_j) = \sum\limits_i S_{ij} v_i$

2.3.3. $f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$.

2.3.4. $(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = (e_1, e_1) + (e_1, e_2) - (e_2, e_1) - (e_2, e_2) = 1 + (e_1, e_2) - (e_1, e_2) - 1 = 0$

2.3.5. Pl. $(f_1, f_2) = (e_2, f_1) - \frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)}(f_1, f_1) = 0$. Minden esetben két ilyen típusú tag kiejti egymást, a többi pedig (különböző $i, j$ párokra) az $(f_i, f_j) = 0$ miatt zérus.

2.3.6. Az eljárás szerint $f_1 = e_1$, $f_2 = \frac{1}{2}(3, 0, -1)$, $f_3 = \frac{2}{5}(-1, 5, -3)$. A szimmetrikus ortogonalizációt használva harmadfokú egyenletet kapunk. Normálva: $f_{1n} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$, $f_{2n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 0, -1)$, $f_{3n} = \frac{1}{\sqrt{35}}(-1, 5, 3)$.

### 2.5.4 Görbevonalú koordinátarendszerek

2.4.1. $\rho = \sqrt{10}$, $\phi = \operatorname{arctg} 3 \approx 71.6°$

2.4.2. $x = 0$, $y = -2$.

2.4.3. Lásd középiskolai anyag - cosinus-tétel néven.

2.4.4. $\rho = \sqrt{5}$, $\phi = \operatorname{arctg} 2 \approx 63.4°$, $z = 5$.

2.4.5. $x = \cos(-3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $y = \sin(-3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $z = -2$.

2.4.6. $0 \leq \rho < \infty$,$-\pi < \phi \leq \pi$, $-\infty < z < \infty$.

2.4.7. $\rho = \sqrt{30}$, $\theta = \operatorname{arctg}(\sqrt{5}/5) \approx 24.1°$, $\phi = \operatorname{arctg} 2 \approx 63.4°$.

2.4.8. $\sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $\sin\phi = 1$, $\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$, $y = \sqrt{2}/2$, $z = -\sqrt{2}/2$.

2.4.9. $\theta = const$: kúpok, amelyek a csúcsa a koordinátarendszer origója, tengelye pedig a $z$-tengely.
$\phi = const$: a $z$-tengelyből kiinduló félsíkok.

2.4.10. Vonatkozzon a $h$ index a hengerkoordinátákban felírt koordinátákra, a $g$ index pedig a gömbi koordinátákra. Ekkor $\rho_g = \sqrt{\rho_h^2 + z^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{\rho_h}{z}$, $\phi_g = \phi_h$. Visszafelé: $\rho_h = \rho_g \sin\theta$, $\phi_h = \phi_g$, $z = \rho_g \cos\theta$.

2.4.11. $R = 4$, $\rho_1 = \sqrt{14}$, $\rho_2 = \sqrt{54}$, $\phi = \operatorname{arctg} 2 \approx 64.3° \quad \Rightarrow \quad (\mu, \nu, \phi) \approx (2.77, 0.90, 63.4°)$

2.4.12. $R = 4$, $\mu = 3$, $\nu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y = 2\sqrt{3}$, $z = 3$.