1 Ismétlés és kiegészítés

1.1 Elemi algebrai fogalmak

1.1.1 Összegek (a szumma jel)

Véges sok x_1,x_2...x_n (valós vagy komplex) szám összegét a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ szimbólummal jelöljük. Ha az indexelés nem 1-től n-ig megy (hanem pl. a-tól b-ig), akkor értelemszerűen a $\sum\limits_{i=a}^{b} x_i$ jelölés használatos. Véges sok szám összegzése esetén a tagok sorrendje tetszés szerint megváltoztatható.
Végtelen sok szám összege esetén a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Ekkor a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ szimbólumot *végtelen sor*nak nevezzük. Ha az előbbi határérték nem létezik, akkor a végtelen sor *divergens*, különben *konvergens*. Egy végtelen sort már nem feltétlenül lehet tetszés szerint átrendezni (gondoljunk pl. az $x_i = (-1)^i$ sorozatból képzett sorra) úgy, hogy a határértéke ugyanaz maradjon. *Abszolút konvergens sor*ok esetén (amikor az egyes x_i tagok abszolút értékét adjuk össze, és az így keletkezett sor konvergens) az átrendezés minden esetben megtehető úgy, hogy a határérték ugyanaz marad. Ha az összegzési határok egyértelműek, akkor azokat nem mindig írjuk ki.
Véges sorozatból képzett összegek és konvergens végtelen sorok esetén igaz a következő (ahol μ és ν valós vagy komplex számok): $\mu \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \nu \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mu x_i + \nu y_i)$, azaz fennáll a linearitás. Az ismertebb sorok közé tartoznak a *számtani sor*ok, pl. $\sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, ill. a *mértani sor*ok, pl. $\sum\limits_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 ... + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

1.1.2 Szorzatok (a produktum jel)

Az összegzéshez hasonlóan a szorzásra is bevezethetünk egyszerűsített jelölést, az $x_1 x_2 ... x_n$ véges sok tagból álló szorzatot a $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ szimbólummal jelöljük. Erre a kifejezésre már nem vonatkozik a fenti linearitás, azonban, ha az x számok mindegyike pozitív, akkor az átalakítható: $lg \prod\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} lg\ x_i$.

1.1.3 Kronecker-szimbólum

Tetszőleges i,j egész számok esetén definiáljuk a δ_{ij} *Kronecker-szimbólum*ot a következőképpen: $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$. Az alkalmazásokban gyakran lépnek fel olyan kifejezések, amelyekben a szumma jel és a Kronecker-delta együtt szerepel, ekkor az összegzésnek csak azt a tagját kell tekinteni, amikor a Kronecker-delta két indexe megegyezik. Rögzített j (pl. $j = 2$) esetén a $\sum\limits_{i=1}^{5} \delta_{ij}$ kifejezés tagjai csak $i = 2$ esetén különböznek nullától, ui. $\delta_{22} = 1$, míg minden más kombináció nulla. Ezért a $\sum\limits_{i=1}^{5} \delta_{ij} = \delta_{22} = 1$, ha $j = 2$. A $\sum\limits_{ij=1}^{3} \delta_{ij}$ összeg értéke pedig hasonló okok miatt 3.

1.1.1. (A) $\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_j = ?$ $(i \in \{1, 2, ...n\})$

1.1.2. (A) $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ij} a_{ij} = ?$ $(j \in \{1, 2, ...n\})$

1.1.3. (A) $\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{ij} \delta_{jk} = ?$ $(i, k \in \{1, 2, ...n\})$

1.1.4. (A) $\sum\limits_{ijk=1}^{n} (3\delta_{ij} + 2\delta_{jk})\delta_{ik} = ?$

1.1.4 Egyváltozós polinomok

A $P_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad x \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_n x^n$ $(a_i \in \mathbf{R})$ típusú függvényeket x n-ed fokú $(n \in \mathbf{N})$, valós együtthatós *polinom*jának (*racionális egész függvény*ének) nevezzük. Két polinom összege és szorzata is polinom. Felmerül a kérdés, hogy a valós számoknál bevezetett osztás hogyan általánosítható a polinomok esetére. Egy M m-edfokú és egy N n-edfokú polinom hányadosa (azaz egy *racionális törtfüggvény*) mindig felírható a következőképpen:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... b_n x^n} = c_{m-n} x^{m-n} + c_{m-n-1} x^{m-n-1} + ... c_0 + \frac{R(x)}{N(x)} \qquad (1.1.1.)$$

Itt az $R(x)$ *maradék* olyan polinom, amelynek fokszáma n-nél kisebb. A c együtthatók és az R maradék a számoknál megszokott osztási algoritmussal számíthatók.

Példa: $(2x^3 - 4x^2 - 2x + 3) \; / \; (x-2) = 2x^2 - 2 - \frac{1}{x-2}$

$$\begin{array}{l} -(2x^3 - 4x^2) \\ \qquad\qquad -2x + 3 \\ \qquad\quad -(-2x + 4) \\ \qquad\qquad\quad -1 \end{array}$$

Bármilyen, közös zérushellyel nem rendelkező két polinom hányadosa kifejezhető ún. *parciális törtek* összegeként. Tekintsünk $\dfrac{M(x)}{N(x)}$ alakú törteket és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $N(x)$-nek nincsenek degenerált gyökei és a gyökök valósak. Például:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \tag{1.1.2.}$$

Itt az A és B együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy a nevezőben levő polinommal megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát és egyenlővé tesszük az egyenlet két oldalán levő azonos kitevőjű x hatványok együtthatóit. Ebben az esetben:

$$1 = (A+B)x + (A-B) \quad \to \; A = -B, \; A - B = 1 \quad \to A = \frac{1}{2}, \; B = -\frac{1}{2} \tag{1.1.3.}$$

Minden valós együtthatójú polinom felbontható első és másodfokú, valós együtthatójú, (tovább már fel nem bontható) tagok szorzatára. Ez a felbontás egyértelmű. Komplex esetben a másodfokú polinomok tovább bonthatóak, ezért minden valós (és komplex) együtthatójú polinom felbontható (komplex) elsőfokú polinomok szorzatára.

1.1.5. (A) Végezzük el az alábbi maradékos osztásokat!

a) $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) \; / \; (x-1)$ b) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) \; / \; (x^2 - 3x + 1)$

1.1.6. (B) Milyen feltételek mellett osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + mx + 1$ polinommal?

1.1.7. (A) Bontsuk parciális törtek összegére az $\dfrac{5}{x^2 - x - 6}$ törtet!

1.1.8. (B) Bontsuk parciális törtek összegére az $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^3 - 10x^2 + 17x + 28}$ törtet!

1.1.5 Permutációk

Egy véges H halmaz egy *permutáció*ján a H összes eleméből képzett olyan rendezett sorozatot értünk, amelyben minden elem pontosan egyszer szerepel. Ez felfogható úgy is, mint a H halmaz egy „eredeti” sorrendű állapotának átrendezése. A permutációk úgy adhatók meg, hogy megadjuk minden egyes elemre, hogy melyik elemre képződik le. Például legyen egy háromelemű halmazunk (célszerűen az 1, 2 és 3 elemekből álló halmaz). Az a permutáció, amely az első két elemet felcseréli, a harmadikat pedig helybenhagyja, a következőképpen írható le:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Az általános írásmód tehát az, hogy a felső sorba írjuk a kiindulási elemeket, azok alá pedig a permutáció után kapottakat. Egy rövidebb jelölés, ha csak az előbbi szisztéma szerinti alsó sort írjuk le.

Legyen P és Q két permutáció. Ha egy halmazt először P, aztán Q szerint rendezünk át, ismét permutációt, az R=QP permutációt kapjuk. Ekkor azt mondjuk, hogy az R a P és a Q permutációk *szorzata*. Legyen a Q permutáció az előbbi háromelemű példánál maradva olyan, hogy a második és a harmadik elemet felcseréli, míg az elsőt helyben hagyja. Ekkor az R=QP és a T=PQ permutációk:

$$\text{R}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{T}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Innen láthatjuk, hogy a permutációk szorzása nem kommutatív művelet. Az olyan permutációkat (mint P és Q is), amelyek csak két elem felcseréléséből állnak, *transzpozícióknak* nevezzük. Bármely permutáció felbontható transzpozíciók szorzatára. A transzpozíciók számának paritása szerint beszélhetünk a permutációk *paritásáról.* Például a P és Q permutációk egy transzpozícióval írhatók le, azaz páratlan permutációk (paritásuk 1). Ezzel szemben R és T párosak (paritásuk 2).

Az $(1,2,3)$ halmaz összes permutációja: $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$. Ez összesen 6, vagyis 3!. (Egy n-elemű halmaznak mindig $n!$ permutációja van.) Az első három permutáció páros, míg a második három páratlan. Egy kör mentén felírva az $(1,2,3)$ elemeket az első három mennyiséget az elemek óramutató járásával megegyező, míg a második hármat azzal ellentétes felsorolásával kapjuk. Az elemek *ciklikus permutációinak* nevezzük a megadott irány szerinti felsorolást.

A háromelemű halmaz permutációinak paritását írja le a háromindexű *Levi-Civita-szimbólum*:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{ha (i,j,k) az (1,2,3) ciklikus permutációja} \\ -1 & \text{ha (i,j,k) az (1,2,3) nem ciklikus permutációja} \\ 0 & \text{ha (i,j,k) az (1,2,3) halmaznak nem permutációja} \end{cases} \qquad (1.1.4.)$$

Például ϵ_{132} értéke -1, míg $\epsilon_{113} = 0$, mert nem az eredeti halmaz permutációja.
H egy k-ad osztályú permutációján a H k számú eleméből képzett olyan rendezett sorozatot értünk, amelyben egyetlen elem sem fordul elő egynél többször. A fenti háromelemű halmaz példájánál maradva hat darab másodosztályú permutáció létezik: (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2). Egy n elemű halmaz esetén az első elemet n elem közül választhatjuk ki, a következőt $n-1$-ből, stb. Az összes k-adosztályú permutáció száma tehát $n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

1.1.9. (A) Határozzuk meg a (T,R,M,I,A,G,O,L,U,S) betűk ezen permutációjának paritását, ha kiinduló helyzetként az alábbi szavakban elfoglalt sorrendjüket fogadjuk el:
a) LOGARITMUS b) ALGORITMUS

1.1.10. (A) Írjuk fel transzpozícióknak egy olyan szorzatát, amellyel az $(1,2,4,3,5)$ permutációt át lehet vinni a $(2,5,3,4,1)$ permutációba!

1.1.11. (C) Lássuk be a következő egyenlőséget: $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}$

1.1.12. (A) Írjuk fel egy négyelemű halmaz másodosztályú permutációit!

1.1.6 Kombinációk, binomiális együtthatók

Egy n elemű H halmaz k-adosztályú kombinációján a H egy k elemű részhalmazát értjük. A fenti háromelemű halmaznak például az alábbi másodosztályú kombinációi vannak: {1,2},{1,3},{2,3}. (A k-adosztályú permutációval szemben tehát itt az a különbség, hogy nem rendezett sorozatokról, hanem csak halmazokról van szó.) Minden n-elemű halmaz k-adosztályú kombinációjának $k!$ számú permutációja létezik, ezért az n-elemű halmaz k-adosztályú kombinációinak száma $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Ezt röviden az $\binom{n}{k}$ szimbólummal jelöljük.
Könnyen látható, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ezek a mennyiségek jelennek meg az ún. *binomiális tétel*ben is, ezért szokás őket *binomiális együttható*knak nevezni. A binomiális tétel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad (1.1.5.)$$

1.1.13. (A) Lássuk be, hogy $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$!

1.1.14. (A) Készítsünk egy táblázatot, amelynek csúcsára $\binom{0}{0}$ kerül, alá $\binom{1}{0}$ és $\binom{1}{1}$ és így tovább. A binomiális együtthatók így nyert táblázata a *Pascal-háromszög.* Figyeljük meg, hogy a háromszög egy-egy eleme a két felső szomszédjának az összege.

1.1.15. (B) A *Stirling-formula* ($n! \approx (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$) segítségével bizonyítsuk be, hogy $\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$.

1.1.7 Csoport

Bizonyos halmazok és azokhoz tartozó műveletek hasonló tulajdonságokat mutatnak. Például ilyen (halmaz,művelet) együttes a $(\mathbf{Z},+)$, azaz az egész számok az összeadással, a $(P_n,+)$ stb. Az ilyen (halmaz,művelet) együtteseket *algebrai struktúráknak* nevezzük. Az olyan algebrai struktúrákat, amelyekre az alábbi tulajdonságok (ún. csoportaxiómák) igazak, *csoportnak* nevezzük (G a csoport, g_i elemekkel):

$\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G :$

(1) $g_1 g_2 \in G$ (zártság)
(2) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ (asszociativitás)
(3) $\exists e$, hogy $e g_1 = g_1$ (létezik balegység)
(4) $\exists g_1^{-1}$, hogy $g_1^{-1} g_1 = e$ (létezik balinverz)

A fenti három algebrai struktúra csoport. (Egy n-elemű halmaz összes permutációja is csoportot alkot. Ez az n-edrendű szimmetrikus csoport: S_n.) Be lehet látni, hogy a bal oldali egység és inverz létezése maga után vonja a jobb oldaliakét is, azt, hogy ezek egyenlőek és egyértelműek. A csoportműveletet (ha más neve nincs) általában szorzásnak hívjuk. A csoportaxiómák nem tartalmazzák a szorzás kommutativitását! Az olyan csoportokat, amelyekben a szorzás kommutatív (pl. $(\mathbf{Z},+)$), *kommutatív*, vagy *Abel-csoportoknak* hívjuk. A G halmaz egy olyan részhalmazát, amelyre önmagában is teljesülnek a csoportaxiómák, *alcsoport*nak hívjuk. Ilyen például $(\mathbf{Q},+)$-nak $(\mathbf{Z},+)$.

1.1.16. (A) Ellenőrizzük, hogy a fenti struktúrák /$(\mathbf{Z},+)$, $(P_n,+)$ és S_n / valóban csoportok!

1.1.17. (A) Csoportot alkotnak e a természetes számok az összeadással? Miért nem?

1.1.18. (A) Írjuk fel S_4 elemeit! Csoportosítsuk őket paritás szerint! Lássuk be, hogy a csoport nem kommutatív!

1.2 Vektor- és mátrixalgebra

1.2.1 Vektortér

A lineáris algebra tárgya olyan rendszerek vizsgálata, amelyekben az összeadás és a számmal való szorzás végezhető el. Ilyen például a sík, vagy a tér vektorainak rendszere. Ebből ered a *vektortér* elnevezés. Ezen műveletek linearitását tükrözi e fogalom másik neve: *lineáris tér*. A vektortér elemeit *vektoroknak* nevezzük. Foglaljuk össze, hogy pontosan hogyan kell a vektorokon ezeket a műveleteket elvégezni, azaz a vektortér axiómáit:

Elemek egy V halmazát a Γ számtest (gyakran $\mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$) feletti vektortérnek nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:
1) (V,+) Abel-csoport
2) A Γ elemei (a *skalárok*) és a V elemei közt értelmezve van egy szorzás (*skalárral való szorzás*), amely mindkét tagra nézve lineáris:
$\forall\ v, w \in V$ és $\forall\ \lambda, \mu \in \Gamma$: $\quad (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v \qquad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
3) Asszociativitás és egység a skalárokra:
$\forall\ v \in V$ és $\forall\ \lambda, \mu \in \Gamma$: $\quad (\lambda\mu) v = \lambda(\mu v) \qquad 1v = v$, ha 1 Γ egységeleme.

A sík és a tér vektorain kívül például a valós (komplex) együtthatós polinomok is vektorteret alkotnak.
A V vektortér $x_1, x_2 ... x_n \in V$ elemeinek $c_1, c_2 ... c_n \in \mathbf{K}$ együtthatós *lineáris kombinációja* a $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ összeg. Azt mondjuk, hogy az $x_1, x_2 ... x_n \in V$ lineárisan függetlenek, ha bármely lineáris kombinációjuk csak úgy lehet 0, ha az együtthatók mind nullák. Az $\{x_i\}$ lineárisan független vektorrendszert *bázisna*k nevezzük, ha V minden eleme kifejezhető e vektorrendszer lineáris kombinációjaként. Bármely két bázis számossága megegyezik, a vektortér *dimenziója* egy tetszőleges bázisának a számossága. V vektorainak egy olyan részhalmazát, amelynek vektorai önmagukban is vektorteret alkotnak V *alter*ének nevezzük.
Példaként vehetjük a sík vektorainak halmazát. Bármely (origóból induló) vektor felírható két nem párhuzamos síkbeli vektor lineáris kombinációjaként. A sík vektorai tehát kétdimenziós vektorteret alkotnak. Az egy egyenesbe eső vektorok alteret alkotnak ezen a téren belül.

1.2.2 Lineáris leképezések

Legyen V és U két vektortér. Az $L : U \to V$ leképezés lineáris, ha $\forall\ v, w \in V$ és $\forall\ \lambda \in \Gamma$ esetén: $L(v + w) = Lv + Lw$ és $L(\lambda v) = \lambda L v$. (A lineáris leképezéseket másképpen *tenzorok*nak is hívják.) Az L lineáris leképezést *izomorfizmusnak* hívják, ha bijekció. *Izomorf* két vektortér ($V \cong U$), ha van köztük izomorfizmus. V és U vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha $dim(V) = dim(U)$. Ha $dim(V) = n$, akkor létezik a $K :\ V \to \mathbf{K}^n$ izomorfizmus, azaz véges dimenziós vektortér minden eleméhez hozzárendelhetünk egy szám n-est. Az ilyen izomorfizmust nevezzük *koordinátázásnak*, az inverzét pedig *paraméterezésnek*. A vektorok összeadása ill. számmal való szorzása a koordinátáikon keresztül tehető meg.
Példa: Tekintsük a másodfokú polinomokat, azaz a $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ alakú kifejezéseket. Ennek a vektortérnek a dimenziója 3. Itt a bázis lehet pl. az $(1, x, x^2)$ vektorrendszer. Az egyes bázisvektorokhoz tartozó koordináták rendre a_0, a_1

és a_2. Egy altér elemeire az jellemző, hogy vektorainak egyes koordinátái nullák. Például a másodfokú polinomok terében alteret alkotnak az elsőfokú polinomok, ebben az esetben az a_2 koordináta nulla.
Ahogy a vektoroknak szám n-eseket feleltetünk meg, úgy feleltethetünk meg a lineáris leképezéseknek *mátrixokat.* A mátrixok olyan számtáblázatok, amelyekre speciális műveleti szabályok érvényesek.
Annak, hogy egy lineáris leképezés egy adott vektort egy másikba visz át ($w = Lv$), egy mátrix-vektor szorzást feleltetünk meg. Tehát mátrix·vektor=vektor. A leképezés egy lineáris transzformáció, tehát a w vektor minden koordinátája a v vektor koordinátáinak lineáris kombinációjaként adódik, azaz:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{i=1}^{n} L_{1i}v_i \\ w_2 &= \sum_{i=1}^{n} L_{2i}v_i \; ... \end{aligned} \qquad (1.2.6.)$$

Az L_{ij} lineárkombinációs együtthatókat célszerűen téglalap formába szokás rendezni (*téglalapmátrix*), azonos dimenziójú vektorterek közti leképezések esetén ez négyzetes elrendezést (*négyzetes mátrix*) jelent.[1] Például, ha mindkét vektortér háromdimenziós:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad (1.2.7.)$$

Az elrendezésből adódó szorzási szabály tehát az, hogy a mátrixban soronként haladunk balról jobbra ,,ütközésig", míg a vektorban lefelé haladunk - az egyes elemeket összeszorozva és összeadva a lineáris kombináció képlete szerint. (A vektornak ezt az ábrázolását szokás oszlopvektornak hívni.)

1.2.1. (A) Írjuk fel az ϵ_{ij} mátrix elemeit, ahol ϵ_{ij} a kétindexű Levi-Civita szimbólum!

1.2.2. (A) Ellenőrizzük, hogy az $L_{ij} = \delta_{ij}$ képlettel megadott *egységmátrix* minden vektort helyben hagy!

1.2.3. (A) Ellenőrizzük, hogy az $L_{ij} = 0$ képlettel megadott *nullmátrix* minden vektort a nullvektorba visz!

1.2.4. (A) Melyik mátrix írja le egy vektor kétszeresére való nyújtását a síkbeli vektorok terében?

1.2.5. (A) Melyik mátrix írja le egy vektor (origóra való) tükrözését a térbeli vektorok terében?

1.2.6. (A) Szorozzuk meg a 3×3-as $L_{ij} = i + j$ mátrixot a háromdimenziós $v_i = 3 - i$ vektorral!

1.2.7. (A) Mi a feltétele annak, hogy két téglalapmátrix szorzata értelmes legyen?

Az egyes lineáris leképezések egymás után is elvégezhetők. Például, ha a v vektoron először az L leképezést végezzük el, aztán az M ($M : V \to W$) leképezést, akkor a $q = MLv$ vektort kapjuk eredményül, ami a W vektortér eleme. Felmerül a kérdés, hogy el lehet e ezt a két transzformációt egy lépésben is végezni. Ez a transzformáció $N : U \to W$, $N = ML$ formalizmussal írható le, azaz az előző két transzformáció szorzataként. Könnyen ellenőrizhető, hogy két mátrix szorzási szabálya teljesen hasonló a mátrix-vektor szorzásban látottakéhoz, azaz (továbbra is a háromdimenziós példával) az

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix}$$

felírás azt jelenti, hogy az M mátrixban haladunk soronként balról jobbra ,,ütközésig", míg az L mátrixban oszloponként felülről lefelé ,,ütközésig", az egyes tagokat összeszorozzuk és összeadjuk.
Az N mátrix egy tetszőleges eleme tehát: $N_{ij} = \sum_{k=1}^{3} M_{ik}L_{kj}$.

[1] A mátrixok (pl. L) egyes elemeit (L_{ij}) *mátrixelemek*nek szokás nevezni.

1.2.8. (A) Szorozzuk össze az $L_{ij} = i + j$ és az $M_{ij} = i - j$ háromdimenziós négyzetes mátrixokat!

1.2.9. (A) Ellenőrizzük a fenti két mátrix példáján, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív művelet!

Mátrixok egymással való szorzásán kívül értelmezzük azok számmal történő szorzását, illetve összeadását. A konstrukcióból természetesen adódnak a következő műveleti szabályok ($\lambda \in \mathbf{K}$):

$$\begin{aligned} (\lambda L)_{ij} &= \lambda L_{ij} \\ (L+M)_{ij} &= L_{ij} + M_{ij} \end{aligned} \qquad (1.2.8.)$$

Azaz a számmal való szorzás és az összeadás az egyes mátrixelemeken keresztül végezhető el.

1.2.10. (A) Egy mátrix λ-val való szorzása melyik másik mátrixszal való szorzással helyettesíthető?

1.2.11. (A) Adjuk össze az $L_{ij} = i + j$ és az $M_{ij} = i - j$ kétdimenziós négyzetes mátrixokat!

1.2.12. (A) Lássuk be, hogy az azonos dimenziójú négyzetes mátrixok az összeadással csoportot alkotnak!

1.2.13. (A) Lássuk be, hogy ez a csoport Abel-csoport!

1.2.14. (A) Az $[L, M] := LM - ML$ mátrixot az L és az M mátrix *kommutátor*ának nevezzük. Határozzuk meg a két fenti mátrix kommutátorát!

1.2.15. (A) Az $\{L, M\} := LM + ML$ mátrixot az L és az M mátrix *antikommutátor*ának nevezzük. Határozzuk meg a két fenti mátrix antikommutátorát!

1.2.16. (A) Igazoljuk az $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ *Jacobi-azonosságot*!

1.2.17. (B) Igazoljuk, hogy az alábbi Pauli-mátrixok kielégítik a $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ és a $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$ összefüggéseket!

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.2.3 A determináns

Lineáris egyenletrendszerek megoldásakor (lásd később) látható, hogy a négyzetes mátrixok egy igen fontos számmal jellemezhetők. Ez a szám a determináns, amit a következő módon definiálunk egy A $n \times n$-es mátrixra:

$$\det A = \sum_{i,j,k\ldots x} \epsilon_{i,j,k\ldots x} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \ldots A_{nx} \qquad (1.2.9.)$$

Példa: kétdimenziós mátrixokra a kétindexű Levi-Civita szimbólum (1.2.1. feladat) használatos. Ezért ebben az esetben $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$. Felírva az A mátrix elemeit, látszik, hogy az elemeket egyszerűen keresztbe kell szorozni:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Háromdimenziós mátrixoknál még hasonló a helyzet:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \qquad (1.2.10.)$$

Itt egyrészt megfigyelhetjük, hogy itt is az átlók alapján történik a szorzás, az előjel az iránytól függ (ezt a szabályt háromdimenziós mátrixok esetén *Sarrus-szabály*nak nevezzük). Másrészt láthatjuk, hogy a determináns jelölhető a mátrix abszolút értékeként is. Nagyobb mátrixok determinánsa már nem határozható meg a Sarrus-szabályhoz hasonló módon. Ezek kiszámolhatók a fenti (1.2.9.) definícióból, de létezik egykönnyebb eljárás is.
Legyen A $n \times n$-es mátrix A^{ij} *almátrix*a az $n \times n$-es mátrix, amelyben az i-edik sorba és a j-edik oszlopba nullát írunk, az A_{ij} elemet kivéve, ahová pedig egyet. Például egy négydimenziós mátrix A^{23} almátrixa:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \qquad \det A^{23} = - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix}$$

Most kimondhatjuk a *kifejtési tételt*, amely szerint a determináns az eredeti mátrix almátrixának tetszőleges oszlopa ill. sora szerint kifejthető:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \det A^{ij} \quad (j = 1, 2, ...n) \tag{1.2.11.}$$

A Levi-Civita szimbólum (tulajdonképpen a permutáció) tulajdonságai alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a determináns oszlopai ill. sorai felcserélésével előjelet vált. Ebből az következik, hogy ha egy mátrix két sora (oszlopa) megegyezik, akkor annak a determinánsa nulla (ugyanis előjelet is vált a determináns felcseréléskor meg nem is). Továbbá az is belátható a definícióból, hogy két mátrix szorzatának a determinánsa a két determináns szorzata:

$$\det(AB) = \det A \det B \tag{1.2.12.}$$

A nulla determinánsú mátrixokat *szinguláris* mátrixoknak nevezzük. Minden A nemszinguláris mátrixra létezik egy A^{-1} *inverz mátrix*, amelyre igaz, hogy $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ahol I (identity) az egységmátrix. A nem szinguláris mátrixokat másképpen *reguláris* mátrixoknak is nevezzük.

1.2.18. (A) Mi a 2D egységmátrix determinánsa? Mi a 2D origóra tükrözésé? Mi a 2D kétszeres nyújtásé?

1.2.19. (A) Miért nem létezhet szinguláris mátrixnak inverze?

1.2.20. (C) Lássuk be a mátrixszorzat determinánsára vonatkozó 1.2.12. állítást!

1.2.21. (C) Bizonyítsuk be az 1.2.11. kifejtési tételt!

1.2.22. (A) Igazoljuk, hogy az n-dimenziós négyzetes nemszinguláris mátrixok nem abeli csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve! Ez az ún. *általános lineáris csoport*: $GL(n)$.

1.2.23. (A) Lássuk be, hogy az n-dimenziós egységnyi determinánsú (*unimoduláris*) négyzetes mátrixok nem abeli csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve! Ez az ún. *speciális lineáris csoport*: $SL(n)$

1.2.24. (A) Egy mátrix inverze meghatározható például úgy, hogy felírjuk, hogy $AA^{-1} = I$, A^{-1} elemeit külön ismeretleneknek választjuk, majd az előbbi szorzás egy egyenletrendszert ad az inverz mátrix elemeire. Határozzuk meg ezzel a módszerrel az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét!

1.2.25. (A) Igazoljuk, hogy nemszinguláris mátrixok esetén $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$!

1.2.4 Skaláris és tenzoriális szorzás

Vektorokat alapvetően oszlop- és sorvektorként ábrázolhatunk:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{x}_1\ x_2\ ...\ x_n)$$

Egy valós A négyzetes mátrix *transzponált*jának nevezzük azt az $A^\dagger$ mátrixot, amelyre $A^\dagger_{ij} = A_{ji}$. Komplex A négyzetes mátrix *adjungált*jának nevezzük azt a A^* mátrixot, amelyre $A^*_{ij} = (A_{ji})^*$. Ilyen értelemben egy oszlopvektor adjungáltja egy sorvektor és fordítva.

Egy oszlop- és egy sorvektor is könnyen összeszorozható a mátrixok szorzásánál megismert ,,jobbra-le" szabály alapján: így minden egyes szorzat egy mátrixelemet fog adni. Hasonló módon a fordított sorrendű szorzás is elvégezhető, ennek az eredménye egy skalár. Háromdimenziós mátrixok példáján:

$$x \circ y \quad := \quad xy^\dagger \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{y}_1\ y_2\ y_3) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix} \tag{1.2.13.}$$

$$(y,x) \quad := \quad y^\dagger x \quad = \quad (y_1\ y_2\ y_3) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{x}_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \tag{1.2.14.}$$

Az első egyenlet szerinti szorzást *tenzoriális* vagy *diadikus*, a második szerintit *skaláris* szorzásnak nevezzük. A fenti jelölésnél az oszlopvektort tekintettük az ,,eredeti" formájúnak, a sorvektort pedig annak adjungáltjának. Felmerül a kérdés ezek után, hogy értelmes-e egy vektor-mátrix szorzás, ill. hogy mi ennek az eredménye. A fenti szorzási szabály (,,jobbra-le") itt úgy alkalmazható, ha a vektort sorvektorként képzeljük el. Ekkor az eredmény egy vektor. Ilyen módon igaz lesz a következő állítás: $(x, Ay) = (xA, y)$, tehát $(xA)_j := \sum_{i=1}^{n} x_i A_{ij}$.

1.2.26. (A) Számítsuk ki a 2D $v_i = i$ és $w_i = 2 - i$ vektorok skaláris és tenzoriális szorzatát!

1.2.27. (A) Igazoljuk, hogy $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$-ben a skaláris szorzás kommutatív!

1.2.28. (A) Számítsuk ki a fenti v és w vektor szorzatát az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal!

1.2.29. (B) Lássuk be, hogy $a, b, c \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ vektorokra érvényes a következő vegyes asszociativitás:
$(a \circ b)c = a(b, c)$ és $c(a \circ b) = (c, a)b$!

1.2.30. (B) Írjuk fel azt a mátrixot, amely az u ($u \neq 0$) vektort a v vektorba viszi!

1.2.31. (B) Mivel egyenlő egy négyzetes mátrix transzponáltjának determinánsa? És a mátrix adjungáltjának determinánsa?

1.2.32. (B) Igazoljuk, hogy $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$!

1.2.5 Normált tér és euklideszi tér

Azokat a valós vagy komplex V vektortereket nevezzük *normált tér*nek, ahol a tér minden vektorának meg van adva a hossza: $\exists \ ||\ || : V \to \mathbf{R}_0^+$, hogy:

(1) $\forall x \in V : ||x|| \geq 0$ és $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbf{K} : ||\lambda \mathrm{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathrm{x}||$
(3) $\forall x, y \in V : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Minkowski-egyenlőtlenség)

Azokat a valós (komplex) V vektortereket nevezzük *euklideszi* (*unitér*) *tér*nek, ahol a tér minden vektorpárjára értelmezve van egy skaláris szorzás (másképpen *belső szorzás*), azaz $\exists\ (\ ) : V \times V \to \mathbf{K}$, hogy:

(1) $\forall x, y \in V : (x, y) = (y, x)$ (Szimmetria)
(2) $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbf{K} : (\lambda \mathrm{x}, \mathrm{y}) = \lambda^* (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ (Vegyes asszociativitás)
(3) $\forall x, y, z \in V : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (Bilinearitás)
(4) $\forall x \in V : (x, x) \geq 0$ és $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Pozitív definit)

$\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ és $\mathbf{C}^{\mathrm{n}}$ is normált, sőt euklideszi terek, ha az előző részben definiált skalárszorzatot használjuk, és a normát az $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ egyenlet szerint értelmezzük. *Egységvektor*nak nevezzük az egységnyi hosszúságú vektorokat. Egy vektor *normálásán* azt értjük, hogy a vektort elosztjuk annak hosszával. A normált vektor iránya megegyezik az eredeti vektoréval. A skaláris szorzat értelmezhető geometriailag is: $(x, y) = ||x|| \cdot ||y|| \ \cos \phi$, ahol ϕ a két vektor által bezárt szög. Egy vektortér ortogonális normált bázisát *ortonormált bázis*nak (ONB) hívjuk.

1.2.33. (A) Normáljuk az $(1, 2)$ vektort!

1.2.34. (A) Igazoljuk $\mathbf{R}^2$-en, hogy a geometriai és az algebrai skalárszorzás ekvivalens!

1.2.35. (B) Igazoljuk $\mathbf{R}^2$-en, hogy fennáll a *Cauchy-Bunakowsky-Schwartz egyenlőtlenség*: $(a, b) \leq ||a|| \cdot ||b||$

1.2.7 Vektoriális és vegyes szorzat

A háromdimenziós térnek megvan az a sajátossága, hogy a skaláris és a tenzoriális szorzáson kívül még egy vektor-vektor szorzás definiálható rajta: a *vektoriális* vagy *keresztszorzás*. Két vektor ($x, y \in \mathbf{R}^3$) vektoriális szorzatát a következőképpen definiáljuk: $x \times y = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} e_i x_j y_k$, ahol e_i az i irányú egységvektor. A szorzat determináns alakban is írható:

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (1.2.15.)$$

A geometriai értelmezés itt: $||x \times y|| = ||x|| \cdot ||y|| \ \sin\phi$, ahol ϕ a két vektor közti szög ($\phi \leq \pi$). Tehát a vektoriális szorzat értéke a két vektor által meghatározott paralelogramma területe. Az $x \times y$ vektor iránya pedig olyan, hogy az x, y és $x \times y$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak. x, y és z vektorok *vegyes szorzat*ának nevezzük a vektoriális és a skaláris szorzat következő kombinációját: $(x, y \times z)$. Ennek értéke megegyezik a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával.

1.2.36. (A) Ellenőrizzük, hogy $e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k$!

1.2.37. (A) Lássuk be, hogy $x \times y = -y \times x$! Mennyi $x \times x$?

1.2.38. (B) Igazoljuk, hogy $(x, y \times z) = (z, x \times y) = (y, z \times x)$!

1.2.39. (C) Bizonyítsuk be az $x \times (y \times z) = y(x, z) - z(x, y)$ kifejtési szabályt!

1.2.7 Speciális mátrixok

Az egységmátrixról és a nullmátrixról már szó volt korábban. *Szimmetrikus* egy valós mátrix, ha $A = A^\dagger$. *Hermitikus* vagy *önadjungált* egy komplex mátrix, ha $A = A^*$. *Antiszimmetrikus* egy valós mátrix, ha $A = -A^\dagger$. *Antihermitikus* egy komplex mátrix, ha $A = -A^*$. *Ortogonális* egy valós mátrix, ha $A^\dagger = A^{-1}$. *Unitér* egy komplex mátrix, ha $A^* = A^{-1}$. *Antiunitér* egy komplex mátrix, ha $A^* = -A^{-1}$. *Normálmátrixok* azok a mátrixok, amelyek adjungáltjukkal felcserélhetők: $[A, A^*] = 0$. *Diagonális* mátrixok azok a mátrixok amelyeknek csak a főátlójukban van nem nulla elem. A skaláris szorzás hermitikus szimmetriájából következik, hogy bármely A mátrix és x, y vektorok esetén $(x, Ay) = (A^* x, y)$.

1.2.40. (A) Legyen U unitér mátrix. Lássuk be, hogy $(x, y) = (Ux, Uy)$!

1.2.41. (A) Lássuk be, hogy az ortogonális és az unitér mátrixok csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve! (*Ortogonális* ($O(n)$) illetve *unitér csoport* ($U(n)$))

1.2.42. (A) Lássuk be, hogy az unimoduláris ortogonális és az unitér mátrixok csoportot alkotnak a mátrixszorzásra nézve! (*Speciális ortogonális* ($SO(n)$) illetve *speciális unitér csoport* ($SU(n)$))

1.2.43. (B) Legyen U unitér mátrix. Bizonyítsuk be, hogy U^* is unitér!

1.2.44. (B) Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrix mindig felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegére!

1.2.8 Mátrixok nyoma és hasonlósága

Egy mátrix *diagonális* elemeinek nevezzük a főátlóban elhelyezkedő elemeit, *offdiagonális* elemeknek nevezzük az azon kívüli elemeit. Egy mátrix *nyoma* (*spurja*, *trace*-e) a mátrix diagonális elemeinek összege. Jele általában Tr. Azaz $Tr(A) = \sum_i A_{ii}$.

1.2.45. (A) Mi az $n \times n$-es egységmátrix nyoma? Mi az $n \times n$-es origóra tükröző mátrixé?

1.2.46. (A) Lássuk be, hogy $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$!

1.2.47. (B) Igazoljuk, hogy $Tr(AB) = Tr(BA)$!

A és B négyzetes mátrixok hasonlók, hogy ha van köztük egy *hasonlósági transzformáció*, azaz létezik egy C invertálható mátrix, hogy $B = C^{-1} AC$.

1.2.48. (A) Igazoljuk, hogy hasonló mátrixok nyoma és determinánsa azonos!

1.2.49. (B) Igazoljuk, hogy a négyzetes mátrixok hasonlósága ekvivalenciareláció!

1.2.9 Lineáris egyenletrendszerek és sajátértékprobléma

*Lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük az $Au = v$ alakú egyenleteket, ahol A négyzetes mátrix, u és v pedig vektorok. Megoldása akkor van, ha A invertálható, ekkor $u = A^{-1}v$. Ennél azonban általában egyszerűbb az ismert *Gauss-eliminációt* vagy a *Cramer-tételt* használni a megoldáshoz. *Homogén* egy lineáris egyenletrendszer akkor, ha $v = 0$. Nézzük meg egy 2D mátrix példáján, hogy ilyenkor mi a megoldás. (Itt az A mátrix elemei az a, b, c és d számok, míg az x és az y a vektor két koordinátája.)

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned} \tag{1.2.16.}$$

Megszorozva az első egyenletet c-vel, a másodikat a-val, majd a két egyenlet kivonásával a következőt kapjuk: $(ad-bc)y = 0$. Hasonló egyenletet kapunk akkor is, ha az x-et fejezzük ki: $(ad - bc)x = 0$. Ezek a szorzatok kétféleképpen lehetnek nullák. Ha az (x, y) vektor nulla, akkor *triviális* megoldásról beszélünk. Ha viszont $(ad - bc) = 0$, akkor a megoldás *nem triviális*. Az $(ad - bc)$ kifejezés pontosan az A mátrix determinánsa. Tehát általánosan akkor van egy homogén egyenletrendszernek nem triviális megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nulla.
Egy A négyzetes mátrix *sajátértékproblémá*jának nevezzük az $Ax = \lambda x$ egyenletet (beszélhetünk mátrixegyenletről, vagy lineáris egyenletrendszerről). Ebben az egyenletben mind a λ *sajátérték*, mind az x *sajátvektor* ismeretlen. Ha mindkét oldalból kivonunk λx-et, akkor a probléma egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldására redukálódik, vagyis az $(A - \lambda I)x = 0$ egyenletre. Ennek tehát akkor van nem triviális megoldása, ha $\det(A - \lambda I) = 0$. Ennek az egyenletnek az x, y koordináták szerinti kifejtését *karakterisztikus polinom*nak nevezzük. A karakterisztikus polinom gyökei adják a sajátértékeket. Ha egy sajátérték többszörös gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor a mátrixnak *degeneráltak* a sajátértékei. A degenerált sajátértékekhez tartozó sajátvektorok által kifeszített vektorteret *sajátaltérnek nevezzük.* A mátrix sajátértékeinek összesége a mátrix *spektruma*. A sajátértékeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve megkaphatjuk az adott sajátértékhez tartozó sajátvektorokat.
Példa: A $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékproblémája a $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$ egyenletre vezet. Ennek a karakterisztikus polinomja $(3-\lambda)^2 - 4$. Ennek a gyökei a $(3-\lambda)^2 = 4$ szerint határozhatók meg: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. A λ_1-hez tartozó sajátvektor a $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ egyenletből adódik. A λ_1-hez tartozó sajátvektora az igaz, hogy $y_1 = -2x_1$. A λ_2-hez tartozó sajátvektora az igaz, hogy $y_2 = 2x_2$. (Itt az indexek a sajátértékek számozását követik.) A sajátvektorokat nem is lehet ennél jobban meghatározni (lásd 1.2.51. feladat), a normált sajátvektorok a következők: $x_{1n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$ ill. $x_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

1.2.50. (A) Adjuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és normált sajátvektorait!

1.2.51. (A) Igazoljuk, hogy ha x egy A mátrix sajátvektora, akkor x bármely számszorosa is sajátvektor!

1.2.52. (A) Lássuk be, hogy ha λ egy A mátrix sajátértéke, akkor A^n $(n \in \mathbf{N})$ mátrix sajátértéke λ^n!

1.2.53. (B) Bizonyítsuk be, hogy egy hermitikus mátrix nem degenerált sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak!

Legyen A egy hermitikus mátrix. Ekkor az $Ax = x\lambda$ egyenlet mátrixos formája: $AX = X\Lambda$, ahol X az x sajátvektorokból alkotott mátrix, Λ pedig a sajátértékekből alkotott mátrix, úgy, hogy az egyes sajátértékek Λ diagonális elemei, a többi elem pedig nulla. Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát bal oldalról $X^\dagger$-tal kapjuk, hogy $X^\dagger AX = \Lambda$. ($X^\dagger X = I$ a 1.2.53. feladat szerint.) A másik odalról szorozva az $A = X\Lambda X^\dagger$ egyenlethez jutunk. Ez utóbbiból látszik, hogy egy hermitikus mátrix bármely n-edik $(n \in \mathbf{N})$ hatványa számítható a következőképpen: $A^n = X\Lambda^n X^\dagger$, ugyanis az $X^\dagger X = I$. A hatványozást ki lehet terjeszteni negatív egész és valós kitevőkre is - a számoknál megszokott módon. A hatványsorral definiálható f függvények pedig a fentiek alapján igen egyszerűen értelmezhetőek hermitikus mátrixokra: $f(A) = Xf(\Lambda)X^\dagger$, ahol $f(\Lambda)$-t úgy képezzük, hogy az egyes sajátértékek f függvényét írjuk be a főátlóba. (Nem hermitikus mátrixok függvényeit is hatványsorukkal értelmezzük, általános esetben azonban ezt nehezebb kiszámolni.)

1.2.54. (A) Adjuk meg a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix négyzetgyökét!

1.2.55. (A) Adjuk meg az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix természetes alapú logaritmusát!

1.2.56. (B) Vegyünk fel egy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2D valós mátrixot. Mi a feltétele annak, hogy ennek a mátrixnak a sajátértékei valósak legyenek? Mit mondhatunk akkor, ha a mátrix szimmetrikus?

1.2.57. (B) Igazoljuk a fenti általános 2D mátrix segítségével, hogy a hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek!

Az 1.2.56. feladatban láttuk, hogy nem minden valós leképezésnek van sajátvektora. (Igaz ugyan, hogy a fenti példában létezett komplex sajátérték minden esetben, de ezzel a leképezés eredménye már nem az eredeti valós vektortér eleme volt.) Komplex leképezések esetében mindig létezik komplex sajátérték és sajátvektor.
A degenerált sajátértékek *algebrai multiplicitás*ának nevezzük a sajátérték kitevőjét a karakterisztikus polinomban, *geometriai multiplicitás*ának pedig a sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenzióját. Az, hogy ez a kettő nem azonos, a következő példán látható.
Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinom $(1-\lambda)^2$. A mátrix (degenerált) sajátértéke tehát 1.

Az 1 sajátérték algebrai multiplicitása itt 2. Egy komplex tér x és y vektorokból álló bázisa esetén a fenti mátrix az alábbi leképezésnek felel meg: $Ax = x \quad Ay = x + y$. Az $A(\alpha x + \beta y) = (\alpha + \beta)x + \beta y$ összefüggés alapján $\alpha x + \beta y$ csak akkor lehet sajátvektor, ha $\alpha = \alpha + \beta$, azaz $\beta = 0$. Ebből pedig az következik, hogy bármely két sajátvektor lineárisan összefügg. A geometriai multiplicitás tehát 1.
Az eddig tárgyalt $Ax = \lambda x$ sajátértékprobléma a mátrix ún. *jobboldali* sajátértékproblémája. A *baloldali* sajátértékprobléma a $xA = x\lambda$ egyenlettel írható le. Megoldása az előzővel analóg, a megoldás szimmetrikus (hermitikus) mátrixok esetén megegyezik.

1.2.10 Alkalmazás

Már az eddig összefoglalt elemi algebrai ismeretek is segítenek egyes kémiai fogalmak megértésében. Ehhez csak néhány kvantummechanikai ismereten kell átsiklani. Vegyünk két hidrogén atomot, amelyek egymástól végtelen távol vannak. Ekkor az energiájuk E és E, vagyis mindkettő ugyanakkora energiával rendelkezik. Írjuk be ezeket az energiákat egy H-mátrix diagonális elemeiként:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Most pedig tulajdonítsunk értelmet az egyes mátrixelemeknek. Legyenek a diagonális elemek az egyes atomok belső kölcsönhatását leíró tagok, vagyis az ő energiájuk minden más zavaró hatástól távol. Az offdiagonális elemek pedig legyenek ezek a zavaró hatások, pontosabban a H_{12} mátrixelem legyen az 1-es hidrogénatomnak a 2-esre kifejtett hatása (energiában), a H_{21} pedig fordítva. Ezek az elemek végtelen távolságban nullák. Figyeljük meg, hogy végtelen távolságban a H mátrix sajátértékei adják a rendszer tagjainak energiáit!
Most tegyük meg azt a heurisztikus lépést, hogy nem végtelen távolságban is legyen az egyes hidrogénatomok energiája a H-mátrix sajátértéke! Ebben az esetben már egy

$$\begin{pmatrix} E & V \\ V & E \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeivel van dolgunk. (A mátrix szimmetrikus, mert a kölcsönhatás is szimmetrikus.) A V tagok írják le a másik atom zavaró hatását. Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek az új H mátrixnak a sajátértékei $E + V$ és $E - V$. Az igazság azonban az, hogy ez az összefüggés nem az atomokra magukra, hanem a bennük levő elektronokra igaz. Még pontosabban az elektronpályákra. Tehát itt kialakul egy alacsonyabb (*kötő*) és egy magasabb energiájú (*lazító*) pálya. És mivel az elektronpályákra két elektron fér el, és a hidrogénatomoknak egy-egy elektronjuk van, ezért mindkét hidrogénatom elektronja a kötő pályán fog elhelyezkedni. Azaz mátrixok sajátértékeivel le lehet írni a kémiai kötést.
Figyeljük meg, hogy dolgozhattunk volna a $H - EI$ mátrix sajátértékeivel is, amelyek $+V$ ill $-V$. Ebben az esetben azt az energiaváltozást kaptuk volna meg, amely a háborítatlan atompályáknak a kötő ill. lazító molekulapályává alakulásakor jelentkezik.

1.2.58. (A) Legyen a rendszerünkben egy hidrogén és egy lítium atom, pontosabban ezeknek egy-egy vegyértékelektronja. Ekkor a következő mátrix sajátértékproblémáját kell megoldani: $\begin{pmatrix} E & V \\ V & F \end{pmatrix}$ Mik a sajátértékek?

Egy kicsit összetettebb feladat a delokalizált rendszerek stabilitásának megértése. Tekintsük a $CH_2-CH-CH_2$ allilrendszert! Azt mondhatjuk, hogy a rendszerben a σ váz kialakult, viszont minden szénatomon van egy π elektron (az allilgyökben). Közelítsük úgy a problémát, hogy mindegyik elektron csak a szomszédos szénatomon levő elektront „látja", csak azzal hat kölcsön. Ekkor a következő H mátrix írja le a rendszer energiáját:

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \qquad (1.2.17.)$$

Azaz az egyes elektronpályák (lévén ugyanolyanok) önmagukkal ugyanúgy (a) hatnak kölcsön. A szomszédos pályák egy ettől eltérő (b) mértékben, míg a távoli (1, 3-as) pályák kölcsönhatását elhanyagolhatjuk. Ezt a közelítést *Hückel-közelítés*nek nevezzük. Ha a fentebb bemutatott módon levonjuk ebből a mátrixból a diagonális tagokat, akkor az új mátrix sajátértékei az új kötések kialakulásakor lejátszódó energiaváltozást adják meg:

$$\text{H-aI} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.18.}$$

Ha pedig az energiát b egységekben kezdjük mérni, akkor az előbbi mátrixot leoszthatjuk b-vel, amelynek eredményeképpen egy új mátrixot kapunk:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.19.}$$

Ennek a mátrixnak a sajátértékei b egységekben az új pályák kialakulásával járó energiaváltozások. A mátrix neve *szomszédsági* (adjacency) mátrix, mert 1 szerepel ott, ahol két atom szomszédos, és 0 ott, ahol nem.

1.2.59. (A) Határozzuk meg a mátrix sajátértékeit. Miért stabilis az allilrendszerek mindegyike: az allilkation, az allilgyök és az allilanion?

1.2.60. (B) Építsük fel a ciklopropenilrendszerek szomszédsági mátrixát! Oldjuk meg a mátrix sajátértékproblémáját! Felhasználva, hogy $b < 0$, adjunk jóslást a ciklopropenilrendszerek stabilitására!

1.3 Egyváltozós valós analízis

1.3.1 Függvények határértéke és folytonossága

Egy valós sorozat ($\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ függvény) *konvergens*, ha létezik egy A valós szám, amelyhez a sorozat tetszőlegesen közel jut egy megfelelő N index után. Ez az A szám a sorozat határértéke. Ellenkező esetben a sorozat *divergens*.
Egy valós függvénynek határértéke van egy x_0 pontban, hogyha a függvény értékével egy A számot tetszőlegesen meg lehet közelíteni úgy, hogy az x_0 pontot megfelelően megközelítjük. Ezt az A számot a függvény *határérték*ének nevezzük az x_0 pontban és a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ szimbólummal jelölhetjük. Abban az esetben, ha a függvény helyettesítési értéke az x_0 pontban megegyezik a határértékével, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *folytonos* abban a pontban ($f \in C\{x_0\}$). Hasonlóképpen beszélünk az egész halmazon stb. vett folytonosságról. Különböző függvények határértéke az ismert eljárások alapján megállapítható.
Számos fontos függvényt definiálunk a hatványsorával. Az alábbi hatványsorok mindegyike minden valós (és komplex) számra abszolút kovergens (konvergenciasugara ∞).

$$\begin{aligned}
\exp(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\operatorname{ch}(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\operatorname{sh}(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

1.3.1. (A) Adjuk meg az alábbi sorozatok $n \to \infty$ határértékeket!

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+4}$ (b) $a_n = \dfrac{n}{2n^2-1}$ (c) $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$ (d) $a_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ (e) $a_n = \dfrac{P_k(n)}{P_l(n)}$ (f) $a_n = \dfrac{n!}{e^n}$

1.3.2 Függvények aszimptotikus viselkedése

Az az intuitív kép, hogy az egyik függvény körülbelül ugyanolyan gyorsan növekszik az argumentum növekedésével, mint egy másik, a függvények növekedésének aszimptotikus fogalmához vezet el. Azt mondjuk, hogy $f(n)$ hozzátartozik a $\Theta(g(n))$ halmazhoz, hogyha egy bizonyos $n > n_0$ után $f(n)$-re teljesül az, hogy $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, ahol c_1 és c_2 pozitív konstansok. Más szóval egy bizonyos $n > n_0$ után az $f(n)$ függvény - egy állandó szorzótényezőtől eltekintve - egyenlő $g(n)$-nel. Ekkor azt mondjuk, hogy $g(n)$ $f(n)$-nek *aszimptotikusan éles korlát*ja.
A fenti definíció főleg az informatikában hasznos algoritmusok leírása esetén és azt mutatja, hogy egy bizonyos algoritmus milyen gyors. Egy $\Theta(n^2)$ algoritmus n^2 nagyságrendű lépésben ad valamilyen problémára megoldást ahol n a probléma mérete, pl. sorbarendezendő adatok mennyisége. Ennél gyorsabb pl. egy $\Theta(n \lg n)$ algoritmus.
Figyeljük meg, hogy a Θ aszimptotikus alsó és felső korlát is egyben. Amikor csak aszimptotikus felső korlát jön szóba, akkor használjuk az O jelölést. Ha tehát egy függvény eleme az $O(g(n))$ halmaznak, akkor egy bizonyos $n > n_0$ felett $g(n)$ konstansszorosával felülről becsülhető. Ebből adódóan $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$. Például tetszőleges másodfokú függvény eleme $O(n^2)$-nek és $\Theta(n^2)$-nek is. Viszont az elsőfokú függvények csak $O(n^2)$-nek elemei, $\Theta(n^2)$-nek nem.
Hasonlóképpen beszélhetünk függvények aszimptotikus viselkedéséről akkor, ha az argumentum nem növekszik (a végtelen felé), hanem csökken (a nulla felé). (Ez az $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ helyettesítéssel oldható meg.) Legyen például $F(\epsilon) = (1 + \epsilon + \epsilon^2)^2$, ahol $0 < \epsilon < 1$. Ekkor minél kisebb ϵ értéke, annál inkább elhanyagolhatóvá válnak az ϵ-t tartalmazó kifejezések az 1 mellett. Felírva $F(\epsilon)$ értékét: $F(\epsilon) = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + 2\epsilon^3 + \epsilon^4$. Itt is alkalmazható az aszimptotikus felső korlát jelölés, pl. $F(\epsilon) = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + 2\epsilon^3 + O(\epsilon^4)$, ami azt mutatja, hogy az utolsó tag legfeljebb akkora, mint ϵ negyedik hatványának konstansszorosa. $O(\epsilon^4)$ rövidebben úgy is írható, hogy $O(4)$. A fenti kifejezésben tehát csak a harmadrendű kifejezéseket vettük egzaktul figyelembe, míg a magasabb rendűeket elhagytuk. Ezt úgy is lehet mondani, hogy $F(\epsilon)$-t ordo(4)-ig közelítettük. A következő szintű elhanyagolás (ordo(3)): $F(\epsilon) = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + O(3)$.

1.3.2. (A) Közelítsük kis abszolút értékű ϵ-okra!
(a) $F(\epsilon) = (a\epsilon^2 + b\epsilon)^2(\epsilon + 1)\ \ O(4) - ig$ (b) $F(\epsilon) = e^\epsilon\ \ O(3) - ig$ (c) $F(\epsilon) = (a + \epsilon)^3 + (b + c\epsilon + d\epsilon^2)^2\ \ O(2) - ig$

1.3.3 Deriválás

Ha egy f függvénynek létezik az alábbi x_0 pontbeli *differenciálhányados*a vagy *derivált*ja, akkor az f függvényt *deriválható*nak nevezzük az x_0 pontban ($f \in D\{x_0\}$):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.3.20.}$$

A folytonossághoz hasonlóan beszélünk az egész halmazon vett deriválhatóságról. Az egész halmazon értelmezett deriváltakból felépített függvény a *deriváltfüggvény*. A deriváltfüggvény jele f' vagy $\dfrac{df}{dx}$. A deriválható függvények folytonosak.

1.3.3. (A) Legyen $x = x_0 + \epsilon$. Az elsőrendű tagok meghagyásával igazoljuk, hogy $(x^3)' = 3x^2$!

1.3.4. (A) Legyen $x = x_0 + \epsilon$. Lássuk be, hogy $(const)' = 0$!

1.3.5. (B) Legyen $x = x_0 + \epsilon$. Az elsőrendű tagok meghagyásával igazoljuk, hogy $(ax^n)' = anx^{n-1}$!

1.3.6. (B) Legyen $x = x_0 + \epsilon$. Bizonyítsuk be, hogy $(\sin x)' = \cos x$!

A deriválás lineáris művelet, azaz függvények összegének deriváltja a deriváltfüggvények összege és egy függvény konstansszorosának deriváltja a deriváltfüggvény konstansszorosa. Emellett az alábbi *deriválási szabályok* érvényesek:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \qquad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{1.3.21.}$$

Az elemi függvények deriváltjai az alábbi táblázatban foglalhatók össze:

Függvény	Derivált	Függvény	Derivált
c	0	x	1
$x^n \ (n \in \mathbf{R})$	nx^{n-1}	e^x	e^x
$a^x \ (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x \ (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x \ (x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\arcsin x \ (\lvert x\rvert < 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x \ (\lvert x\rvert < 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

1.3.7. (A) Számítsuk ki az $f(x) = (2x+1)^3$ függvény deriváltját!

1.3.8. (A) Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{3x^2-3x}$ függvény deriváltját!

1.3.9. (A) Ellenőrizzük a tangensfüggvény fent megadott deriváltját a hányadosfüggvény deriválási szabályával!

1.3.10. (A) Ellenőrizzük az areafüggvények fent megadott deriváltját az inverzfüggvény deriválási szabályával!

1.3.11. (B) Számítsuk ki az $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ függvény deriváltját!

1.3.12. (B) Számítsuk ki az $f(x) = x^x$ függvény deriváltját!

1.3.13. (B) Számítsuk ki az $f(x) = 3e^{4x^2}(1+2x+6x^2)$ függvény deriváltját!

Ha a deriválás során kapott függvények tovább deriválhatóak, többszörös deriválhatóságról beszélünk. A kétszeresen deriválható függvények jele: $f \in D^2$. Az, hogy egy függvény n-szer *folytonosan deriválható*, azt jelenti, hogy az n-edik deriváltja létezik és folytonos, ennek jele: $f \in C^n$. A végtelen sokszor deriválható függvényeket *sima* függvényeknek nevezzük. A többszörös deriváltak segítségével előállítható a függvény *Taylor-sor*a, amely (jól viselkedő függvények esetében) előállítja a függvényt:

$$f(x_0+\epsilon) = f(x_0) + f^{'}(x_0)\epsilon + \frac{1}{2!}f^{''}(x_0)\epsilon^2 + \frac{1}{3!}f^{'''}(x_0)\epsilon^3 + ... \qquad (1.3.22.)$$

A Taylor-sor n-edik részletösszege $T_n(f, x_0+\epsilon) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\epsilon^k$. A $T_n(f,x) - f(x)$ különbség a Taylor-sor n-edik taghoz tartozó hibája. Ez a hiba a sor következő ($n+1$-edik) tagjával becsülhető.

1.3.14. (A) Fejtsük sorba a négyzetgyök függvényt az 1 körül. A sorfejtés segítségével adjuk meg $\sqrt{1.1}$ értékét $O(3)$ pontossággal!

1.3.15. (A) Határozzuk meg $\ln(3.01)$ értékét $O(3)$ pontossággal! Mennyivel becsülhető a közelítés hibája?

1.3.16. (B) Becsüljük meg a $\sqrt{1-\sin 10^\circ}$ kifejezés értékét!

1.3.17. (B) Közelítsük az $\exp\sqrt{1-\operatorname{arctg} 2\cdot 10^{-3}}$ kifejezés értékét!

1.3.18. (B) Tegyük fel, hogy az 1.2.58. feladatban nem lítium és hidrogén atomok, hanem prócium és deutérium atomok kölcsönhatását vizsgáljuk. Adjuk meg közelítőleg a rendszer sajátértékeit!

1.3.4 Szélsőértékek és inflexiós pontok

Egy függvénynek *lokális minimuma* (*maximuma*) van egy x_0 pontban, ha létezik x_0-nak egy olyan környezete, amelynek minden pontjához tartozó függvényérték nagyobb (kisebb) vagy egyenlő, mint $f(x_0)$. Ha a szélsőérték akkor is megmarad, ha a környezetet a függvény értelmezési tartományára terjesztjük ki, akkor *abszolút* szélsőértékről beszélünk.
Differenciálható függvények esetében a szélsőértékek létezése összefüggésben van a deriváltak viselkedésével. (De természetesen nem deriválható függvényeknek is lehet szélsőértéke, pl. az abszolútérték függvény a 0 pontban nem deriválható, ott mégis minimuma van.) Ha f-nek x_0-ban szélsőértéke van, akkor $f^{'}(x_0) = 0$. Ez fordítva nem igaz, azaz ez a feltétel szükséges, de nem elégséges. Sima függvényekre megfogalmazható egy szükséges és elégséges feltétel: ha az x_0 pontban a függvény első $n-1$ deriváltja eltűnik (azaz nulla) és az n-edik derivált nem tűnik el és n páros, akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van. Ha ez az el nem tűnő derivált negatív, akkor lokális maximum, ha pozitív, akkor lokális minimum van. Ha az első el nem tűnő derivált rendje páratlan, akkor a függvénynek ott *inflexiós pont*ja van. (Inflexiós pontnak nevezzük általában azokat a pontokat, ahol a görbület előjelet vált.) Inflexiós pontja van például az $f(x) = x^3$ függvénynek a 0 pontban.

1.3.19. (A) Jellemezzük az $f(x) = x^4$ függvényt szélsőértékek és inflexiós pont szempontjából!

1.3.20. (B) Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

1.3.21. (B) Adjuk meg az $f(x) = x^2 e^{-x}$ függvény szélsőértékeit és inflexiós pontjait!

1.3.5 Integrálás 1: elemi fogalmak

Az integrálszámítás alapvetően két különböző feladatból indul ki. Az egyik a deriválás műveletének megfordítása, ebből született a *határozatlan integrál* fogalma. A másik alapprobléma egy függvény görbéje alatti terület meghatározása. Ez a célkitűzés vezet el a *határozott integrál* fogalmához. A kétfajta integrálfogalmat a *Newton-Leibniz-tétel* kapcsolja össze.
Egy $[a, b] \subset \mathbf{R}$ intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény *primitív függvény*e az az $F(x)$ függvény, amely ugyanezen az intervallumon deriválható és amelynek deriváltja $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Ilyen függvényből (ha egy létezik) végtelen sok létezik, hiszen akkor az $F(x) + C$ (C konstans) függvény is primitív függvény. (Az eljárás eredménye tehát nem egyértelmű, innen ered a határozatlan integrál kifejezés.) A primitív függvények másik jelölése: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Az $\int$ integráljel után álló $f(x)$ függvény az *integrandus*, x az *integrációs változó*, C pedig az *integrációs állandó*. Ha egy függvény egy adott intervallumon folytonos, akkor azon integrálható is.
Az integrálás a deriváláshoz hasonlóan lineáris művelet, azaz függvények összegének integrálja a primitív függvények összege és egy függvény konstansszorosának integrálja az eredeti primitív függvény konstansszorosa. Ezen szabályokon túl az alábbi *integrálási szabályok* érvényesek:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad \int \frac{f^{'}(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int f(x)f^{'}(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C$$
$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx \qquad (1.3.23.)$$

Ezek közül a másodikat *logaritmikus integrálás*nak szokták nevezni, a negyediket pedig *parciális integrálásnak*. Az elemi függvények integráljait az alábbi táblázatban foglaljuk össze.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x	$a^x \ (a > 0)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

1.3.22. (A) Ellenőrizzük az 1.3.23. integrálási szabályokat deriválással!

1.3.23. (A) (a) $\int \sin(2x+3) =?$ (b) $\int xe^x =?$

1.3.24. (B) $\int x^n e^x =?$ $(n \in \mathbf{N})$

1.3.25. (A) (a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} =?$ (b) $\int \frac{e^x}{e^x+1} =?$

1.3.26. (A) (a) $\int (6x^4 - 3x^2 + x + 7) =?$ (b) $\int \frac{x^2}{1+x^2} =?$

1.3.27. (A) (a) $\int \sqrt[4]{1-4x} =?$ (b) $\int \sin x \cos x =?$

Gyakran az egyes integrálok kiszámítása további trükköket igényel. Egy ilyen trükk például a trigonometrikus és az exponenciális függvények szorzatánál alkalmazható dupla parciális integrálás. Tekintsük az $F(x) = \int e^{2x} \sin x$ kifejezést. Integráljuk először úgy parciálisan, hogy az egyik, majd úgy, hogy a másik függvényt tekintjük deriváltfüggvénynek (azaz $f'g$, majd fg' alakban). Az első eredménye $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}\int e^{2x} \cos x$, a másodiké pedig $F(x) = -e^{2x} \cos x + 2\int e^{2x} \cos x$. Az elsőt néggyel megszorozva kapjuk a két egyenletből: $4F(x) = 2e^{2x} - 2S(x)$ és $F(x) = -e^{2x} \cos x + 2S(x)$, ahol $S(x)$-szel jelöltük a megmaradó integrálos tagot. Ezt ki lehet ejteni a két egyenlet összeadásával: $5F(x) = 2e^{2x} \sin x - e^{2x} \cos x$, amiből a keresett integrál: $F(x) = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)$. (Az integrációs állandókat az egyszerűség kedvéért elhagytuk.)
Egy másik gyakran alkalmazott trükk a *helyettesítéses módszer.* Ha $x = \phi(t)$, akkor a közvetett deriválás szabályát figyelembe véve: $\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)dt$. Például az $\int \frac{x}{1+x^2}dx$ integrálnál alkalmazhatjuk a következő helyettesítést: $t = 1 + x^2$. Ekkor $\frac{dt}{dx} = 2x$. Ezt beírva az előzőbe: $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
Egy további hasznos módszer racionális törtfüggvények integrálása esetén a parciális törtekre bontás. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a nevező minden gyöke egyszeres és valós. Vegyük példaként a 1.1.7. feladatban felírt függvényt: $f(x) = \frac{5}{x^2-x-6}$. Felhasználva ennek a parciális törtekre bontását adódik, hogy $\int \frac{5}{x^2-x-6}dx = \int \frac{1}{x-3}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x-3| - \ln|x+2| + C$. Trigonometrikus függvények esetén a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, azaz a $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ helyettesítés a sin és cos függvényekből álló integrált gyakran racionális egész vagy törtfüggvény integráljára vezeti vissza. Ebben az esetben $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ és $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
A $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ és hasonló jelölések formálisak, de az alkalmazásokban elterjedt a használatuk. Az előbbi pl. azt jelenti, hogy $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

1.3.28. (A) Miért nem kellett az abszolútérték jel a helyettesítéses integrálásnál bemutatott példában? Hogyan lehetett volna másképp megoldani a feladatot?

1.3.29. (A) (a) $\int \cos x e^{3x} =?$ (b) $\int e^{2x} \operatorname{sh} 4x =?$

1.3.30. (A) (a) $\int \frac{5x+6}{x^2+x-2} =?$ (b) $\int \frac{1}{1+\cos x} =?$

1.3.31. (A) Oldjuk meg az $f(x) = \sqrt[4]{7x-16}$ függvény integrálását a $t = 7x - 16$ helyettesítéssel!

1.3.32. (A) Oldjuk meg az $f(x) = \frac{1}{(-3x+4)^4}$ függvény integrálását alkalmas helyettesítéssel!

1.3.33. (A) Oldjuk meg az $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ függvény integrálását az $x = \ln t$ helyettesítéssel!

1.3.34. (A) Oldjuk meg az $f(x) = e^{2x}\sin(e^x)$ függvény integrálását alkalmas helyettesítéssel!

1.3.35. (B) (a) $\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} = ?$ (b) $\int \frac{1}{\sin x \cos x} = ?$

Ha egy $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ($[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbf{R}$) korlátos függvény grafikonja alatti területet akarunk meghatározni, akkor egy követhető módszer, hogy a területet téglalapokra osztjuk és a téglalapok területét adjuk össze. Egy téglalap területe kiszámítható a felosztáshoz tartozó részintervallum hosszának $(x_{i+1} - x_i)$ és a függvénynek a részintervallum valamely pontján felvett értékének a szorzataként. Ha elég kicsi részintervallumokra osztjuk az egész intervallumot, akkor mindegy, hogy a részintervallum mely pontján számítjuk a függvényértéket. Ezt a megállapítást a következőképpen összegezhetjük. Egy f $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvény *Riemann integrálható*, vagyis létezik a határozott integrálja, ha létezik az alábbi határérték:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max|x_{i+1}-x_i|\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.3.24.}$$

ahol $f(\xi_i)$ az i-edik részintervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényérték. A határozott integrál képzése lineáris művelet, azaz a konstans szorzó az integráljel elöl kiemelhető és az összeg tagonként integrálható. A fenti definícióból következik a határozott integrál még néhány tulajdonsága ($a < c < b$):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad f(x) > 0\ [a, b]\text{–n} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{1.3.25.}$$

A határozott integrálok kiszámítását teszi könnyebbé a Newton-Leibniz tétel, amely szerint amennyiben létezik az integrálandó függvénynek primitív függvénye, akkor annak az intervallum végpontjaiban felvett értéke a következőképpen határozza meg a Riemann-integrál értékét:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b \tag{1.3.26.}$$

A határozott integrálásnál figyelni kell arra, hogy a helyettesítéses integrálás alkalmazásakor az integrálási határok is megváltoznak. Például az $\int_1^2 (3x+4)^4 dx$ integrál kiértékelésekor lehet az $u = 3x + 4$ helyettesítést választani. Ekkor az alsó integrálási határ 7-re, a felső pedig 10-re módosul.

1.3.36. (A) Határozzuk meg az 1.3.23.-1.3.27. feladatban szereplő függvények Riemann-integrálját a $[0, 1]$ intervallumon a már kiszámított primitív függvények segítségével!

1.3.37. (B) Deriváljuk le az $f(x) = \int_0^x g(y)dy$ függvényt!

1.3.5 Integrálás 2: az integrálfogalom kiterjesztései

A Riemann-integrál fogalmához (a valós analízis tárgykörén belül) két kötöttség kapcsolódik, az egyik az integrálandó függvény korlátossága, a másik az integrációs intervallum korlátossága. A két megkötés valamelyikének nem megfelelő integrálokat nevezzük *improprius integrálok*nak. Ezeken belül csak a végtelen integrációs határral rendelkező integrálokat tárgyaljuk. Alkalmas értelmezési tartományok mellett az alábbi definíciók érvényesek:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)dx \tag{1.3.27.}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)dx \tag{1.3.28.}$$

Ha ezek a határértékek léteznek, akkor az improprius integrál konvergens, ellenkező esetben divergens. Ha mindkét integrálási határ tart a végtelenhez:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \lim_{A\to-\infty,\ B\to\infty} \int_A^B f(x)dx \tag{1.3.29.}$$

Elképzelhető az, hogy a fenti esetben (amikor A és B egymástól függetlenül tart a végtelenhez) a határérték nem létezik, viszont az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad := \quad \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx \qquad (1.3.30.)$$

határérték létezik. Ezt a határértéket az improprius integrál *főértékének* nevezzük. Ha a 1.3.29. integrál létezik, az egyenlő a főértékével.

1.3.38. (A) Állapítsuk meg az alábbi integrálokról, hogy konvergensek vagy divergensek, és mi az értékük, ha konvergensek!

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ (b) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

1.3.39. (B) $\int_0^{\infty} x^5 e^{-2x} dx = ?$

Improprius integrállal lehet definiálni a faktoriális fogalmának kiterjesztését lehetővé tevő *gammafüggvényt* is:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0) \qquad (1.3.31.)$$

A definíció még komplex számokra is érvényes (amelyek valós része pozitív). Parciális integrálással belátható, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, valamint azt is könnyű igazolni, hogy $\Gamma(1) = 1$. Ebből adódóan $\Gamma(x+1) = x!$ minden x természetes szám esetén. Mivel a fenti definícióban nem szerepelt, hogy x természetes szám legyen, a Γ-függvény valóban a faktoriális fogalmának kiterjesztésének tekinthető.

1.3.40. (A) Igazoljuk parciális integrálással, hogy $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$!

1.3.41. (A) Számítsuk ki $\Gamma(1)$ és $\Gamma(2)$ értékét az 1.3.31. definíció alapján!

A Riemann-féle integrálfogalom egy másik kiterjesztése, hogy egy $f(x)$ függvényt egy másik, $g(x)$ függvény szerint integrálunk. Az $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallum feletti $g(x)$ szerinti *Riemann-Stieltjes integrálját* a következőképpen definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)dg(x) := \lim_{\substack{\max|x_{i+1}-x_i|\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \qquad (1.3.32.)$$

ahol a jelölések a Riemann integrálnál bevezetett jelöléssel megegyeznek. A g függvényt *integrátornak* vagy *eloszlásfüggvénynek* nevezzük. A Riemann-Stieltjes integrál képzése lineáris művelet és érvényes rá a közönséges Riemann-integrálnál megismert intervallum szerinti additivitás is. A linearitás továbbá az integrátor szerinti additivitásra is kiterjed:

$$\int_a^b f(x)d(g_1(x) + g_2(x)) = \int_a^b f(x)dg_1(x) + \int_a^b f(x)dg_2(x) \qquad (1.3.33.)$$

Végül igaz még a következő (parciális integráláshoz hasonlító) összefüggés is:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \qquad (1.3.34.)$$

A Riemann-Stieltjes integrálok általánosítása improprius esetre a közönséges Riemann-integrálokhoz hasonló módon történik. Amennyiben f $[a, b]$-n Riemann-integrálható, g deriváltja pedig ugyanott létezik és szintén Riemann-integrálható, akkor a Riemann-Stieltjes integrál a következő módon számolható ki:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx \qquad (1.3.35.)$$

1.3.42. (A) Integráljuk az $f(x) = x$ függvényt a $g(x) = x^2$ függvény szerint a $[0, 1]$ intervallumon!

1.3.43. (B) Integráljuk az $f(x) = \sin 2x$ függvényt a $g(x) = |x|$ függvény szerint a $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon!

1.4 Megoldások

1.4.1 Elemi algebrai fogalmak

1.1.1. v_i

1.1.2. a_{jj}

1.1.3. δ_{ik}

1.1.4. 5n

1.1.5. a) Hányados: $x^3 - x^2 + 3x - 3$ Maradék: 5 b) Hányados: $2x^3 + 3x + 11$ Maradék: $25x - 5$

1.1.6. $p=-q^2 - 1, m = q$

1.1.7. $\dfrac{5}{x^2 - x - 6} = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+2}$

1.1.8. $\dfrac{x^2 - 2x + 7}{x^3 - 10x^2 + 17x + 28} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-4} + \dfrac{C}{x+7}$, ahol $A = -\dfrac{1}{5}$, $B = \dfrac{31}{55}$, $C = \dfrac{7}{11}$

1.1.9. Mindkét esetben páratlan.

1.1.10. Páratlan számú transzpozícióval lehet. Pl. (15)(34)(25), ahol a zárójelben megadott két számot cseréljük fel.

1.1.11. A kifejezésnek csak akkor lehet nullától különböző értéke, ha az ij és az lm párok megegyeznek.
Ez a két Kronecker szimbólum szorzatával fejezhető ki, az előjelek a felcserélésből adódnak.

1.1.12. $(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(2,4)$ $(3,1)$ $(3,2)$ $(3,4)$ $(4,1)$ $(4,2)$ $(4,3)$

1.1.13. $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $\dbinom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, a kettő hányadosa éppen $\dfrac{n}{k}$.

1.1.14.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

1.1.15. $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!} \approx (\dfrac{2n}{e})^{2n} 2\sqrt{\pi n} (\dfrac{e}{n})^{2n} \dfrac{1}{2\pi n} = \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$

1.1.16. Minden egész szám (polinom) összege egész szám (polinom). Az összeadás asszociatív művelet mindkét esetben.
Az egységelem egész számoknál a nulla, polinomoknál a null polinom (ami szintén nulla). Az egyes elemek inverze az elem mínusz egyszerese. Minden permutáció szorzata is permutáció. Az asszociativitás példákon követhető.
Az egységelem az, amikor nem rendezünk át semmit. Az inverzelem az, amikor ,,visszafelé” rendezünk.

1.1.17. Nem, mert nincsen a számoknak inverzük. Az ilyen struktúra neve *félcsoport*.

1.1.18. Párosak: (1234) (1342) (1423) (2143) (2314) (2431) (3124) (3241) (3412) (4132) (4213) (4321)
Páratlanok: (1243) (1324) (1432) (2134) (2341) (2413) (3142) (3214) (3421) (4123) (4231) (4312)
(1243)(1432) = (1342) (1432)(1243) = (1423)

1.4.2 Vektor- és mátrixalgebra

1.2.1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.2. $w_i = \sum\limits_j \delta_{ij} v_j = v_i$

1.2.3. $w_i = \sum_j 0\ v_j = 0$

1.2.4. $\begin{pmatrix} 2\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix}$

1.2.5. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.2.6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$

1.2.7. Az, hogy az egyiknek a sorainak a száma meg kell egyezzen a másik oszlopainak számával.

1.2.8. $\begin{pmatrix} 2\,3\,4 \\ 3\,4\,5 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -7 \\ 14 & 2 & -10 \\ 17 & 2 & -13 \end{pmatrix}$

1.2.9. Például a fordított mátrixszorzás eredményének $(1,1)$ eleme -11.

1.2.10. $_{ij} = \lambda\delta_{ij}$, vagyis egy olyan mátrixszal, amelynek a főátlójában λ-k állnak, a többi mátrixelem pedig nulla.

1.2.11. $N_{ij} = L_{ij} + M_{ij} = i + j + i - j = 2i$

1.2.12. Az azonos dimenziójú négyzetes mátrixok összege is az, az asszociativitás következik a számokra érvényes asszociativitásból.Az egységelem a nullmátrix, az inverzelem az a mátrix, amely minden eleme az eredeti ellentetje.

1.2.13. A mátrixok összeadásakor végső soron számokat adunk össze. Ezek összeadása kommutatív, így a mátrixoké is az.

1.2.14. $[L, M] = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

1.2.15. $\{L, M\} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.16. Végig kell számolni, kijön.

1.2.17. Végig kell számolni, kijön.

1.2.18. 2. -2. 4.

1.2.19. A 1.2.12. összefüggés szerint egy mátrix inverzének a determinánsa az eredeti mátrix determinánsának a reciproka. A nullának pedig nincs reciproka.

1.2.20. Legyen $AB = C$, ekkor

$$\det(AB) = \sum_{kl\ldots s} \epsilon_{kl\ldots s} C_{1k} C_{2l} \ldots C_{ns} \tag{1.3.36.}$$

A mátrixszorzás definíciójából:

$$C_{Kk} = (AB)_{Kk} = \sum_{k'=1}^{n} A_{Kk'} B_{k'k} \tag{1.3.37.}$$

Beírva ezt és a tényezőket rendezve:

$$\det(AB) = \sum_{kl\ldots s} \sum_{k'l'\ldots s'} \epsilon_{kl\ldots s} A_{1k'} A_{2l'} \ldots A_{ns'} B_{k'k} B_{l'l} \ldots B_{s's} \tag{1.3.38.}$$

Átrendezve:

$$\det(AB) = \sum_{k'l'\ldots s'} A_{1k'} A_{2l'} \ldots A_{ns'} \Big(\sum_{kl\ldots s} \epsilon_{kl\ldots s} B_{k'k} B_{l'l} \ldots B_{s's}\Big) \tag{1.3.39.}$$

A második szumma nem más, mint B determinánsa úgy, hogy a sorok még permutálva vannak, ezért:

$$\det(AB) = \sum_{k'l'\ldots s'} A_{1k'} A_{2l'} \ldots A_{ns'} \epsilon_{k'l'\ldots s'} \det B \tag{1.3.40.}$$

Emiatt:

$$\det(AB) = \det B \sum_{k'l'\ldots s'} \epsilon_{k'l'\ldots s'} A_{1k'} A_{2l'} \ldots A_{ns'} = \det A \det B \tag{1.3.41.}$$

1.2.21. Először gondoljuk meg, hogy egy almátrix elemeinél $A^{(lL)}_{lL'} = \delta_{L'L}$. Ebből az almátrix determinánsa:

$$\det A^{(lL)} = \sum_{I'J'...X'} \epsilon_{I'J'...X'} A^{(lL)}_{1I'} A^{(lL)}_{2J'} ... A^{(lL)}_{lL'} ... A^{(lL)}_{nX'} = \sum_{I'J'...X'} \epsilon_{I'J'...X'} A_{1I'} A_{2J'} ... \delta_{L'L} ... A_{nX'} \qquad (1.3.42.)$$

Ezt megszorozva A_{lL}-lel és összegezve L-re:

$$\sum_L A_{lL} \det A^{(lL)} = \sum_{I'J'...X'} \epsilon_{I'J'...X'} A_{1I'} A_{2J'} ... (\sum_L A_{lL} \delta_{L'L}) ... A_{nX'} \qquad (1.3.43.)$$

Emiatt:

$$\sum_L A_{lL} \det A^{(lL)} = \sum_{I'J'...X'} \epsilon_{I'J'...X'} A_{1I'} A_{2J'} ... A_{lL'} ... A_{nX'} = \det A \qquad (1.3.44.)$$

1.2.22. A zártság triviális. Legyen az eredmény valamely D mátrix. Számítsuk ki az ij mátrixelemét a két sorrend szerint. $D^{(1)}_{ij} = \sum_k A_{ik}(BC)_{kj}$, ill. $D^{(2)}_{ij} = \sum_k (AB)_{ik} C_{kj}$.
Ezután feloldva a belső mátrixszorzást:
$D^{(1)}_{ij} = \sum_{kl} A_{ik} B_{kl} C_{kj}$, ill. $D^{(2)}_{ij} = \sum_{kl} A_{il} B_{lk} C_{kj}$.
Mivel az összes indexen végigmegy az összegzés, a két kifejezés azonos. Az egységelem az egységmátrix, inverze pedig minden nemszinguláris mátrixnak van. A nem abeli viselkedés bármely jól választott példával igazolható.

1.2.23. Az 1.2.12. összefüggés szerint két unimoduláris mátrix szorzata is unimoduláris. Minden idetartozó mátrix egyben eleme $GL(n)$-nak is, ezért a többi a fentiek alapján triviális. A nem abeli viselkedés bármely jól választott példával igazolható.

1.2.24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A fentiek alapján adódnak az $a + 2c = 1$ és hasonló egyenletek. Ezek megoldásával a keresett mátrix:

$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.2.25. Szorozzuk meg az egyenletet balról először B-vel, majd A-val, ekkor: $(AB)(AB)^{-1} = I$, ami azonosság.

1.2.26. $(v, w) = 1$ a skaláris szorzat. A tenzoriális szorzat: $v \circ w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.27. Azért az, mert a számok szorzása kommutatív, a skaláris szorzat pedig számok szorzatából áll.

1.2.28. Az $(5, 4)$ és az $(1, 2)$ vektorok.

1.2.29. $[(a \circ b)c]_k = \sum_l a_k b_l c_l = a_k \sum_l b_l c_l = [a(b, c)]_k \quad (k = 1, 2, ...n)$
$[c(a \circ b)]_k = \sum_l c_l a_l b_k = b_k \sum_l c_l a_l = [b(c, a)]_k \quad (k = 1, 2, ...n)$

1.2.30. Ez a mátrix az előző feladat alapján a $\frac{v \circ u}{(u, u)}$ mátrix.

1.2.31. Egy mátrix transzponáltjában nem az oszlopok, hanem a sorok szerint megy a permutáció a determináns kiszámításakor. Ez a kettő ekvivalens, tehát a $\det A^\dagger = \det A$. Egy mátrix adjungáltjának a determinánsa hasonló okok miatt az eredeti determináns komplex konjugáltja.

1.2.32. $(AB)^\dagger_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k B^\dagger_{ik} A^\dagger_{kj} = (B^\dagger A^\dagger)_{ij}$

1.2.33. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$

1.2.34. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy az egyik vektor az x tengelyre essen, pontosabban annak 0 pontjában legyen a kezdőpontja és a pozitív irányba mutasson. Ennek a vektornak a koordinátái ekkor $(||a||, 0)$, ahol a az egyik vektor. Ekkor a második vektor x koordinátája pontosan $||b|| \cdot \cos\phi$, ahol b a második vektor és ϕ az általuk bezárt szög. Ekkor a skaláris szorzat két definíciója megegyezik, hiszen az y koordinátája az a vektornak 0.

1.2.35. A skaláris szorzás geometriai meghatározása szempontjából ez érthető, hiszen $\cos\phi \le 1$.

1.2.36. Írjuk be a determinánsba bármelyik két egységvektort, pl. $e_1 \times e_2$ esetén a determináns második sora 1 0 0, míg a harmadik sora 0 1 0. Innen kiszámítható, hogy a determináns értéke e_3.

1.2.37. Igaz, hiszen ez a determináns két sorának felcserélését jelenti. A vetoriális szorzás tehát *antikommutatív.* Emiatt $x \times x = 0$.

1.2.38. $(x, y \times z) = \sum\limits_{ijk} \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$. A ciklikus permutációk a Levi-Civita szimbólumot nem változtatják meg.

1.2.39. $x \times y \times z = (\sum\limits_l x_l e_l) \times (\sum\limits_{ijk} \epsilon_{ijk} e_i y_j z_k) = \sum\limits_{ijklm} \epsilon_{mli} e_m x_l \epsilon_{ijk} y_j c_k$.

Az 1.1.11. feladat eredményét felhasználva:

$x \times y \times z = \sum\limits_{jk} e_j x_k y_j z_k - \sum\limits_{jk} e_k x_j y_j z_k = y(x,z) - z(x,y)$

1.2.40. $(Ux, Uy) = (U^* Ux, y) = (U^{-1}Ux, y) = (Ix, y) = (x, y)$

1.2.41. Az SL csoporthoz hasonlóan itt is csak a zártság nem triviális. Az előző feladatban láttuk, hogy ha két vektort megszorzunk ugyanazzal az unitér mátrixszal, akkor az új vektorok skalárszorzata az eredetiekével megegyező lesz. Azaz az unitér transzformáció megőrzi a skaláris szorzást. Látható, hogy ez fordítva is igaz, ha egy transzformáció megőrzi a skaláris szorzatot, akkor az unitér. Nyilván ha ezek után a vektorokat még egy unitér transzformációnak vetjük alá, akkor is megőrződik a skaláris szorzás. Tehát két unitér mátrix szorzata is unitér.

1.2.42. Az 1.2.23. feladathoz hasonlóan.

1.2.43. Az 1.2.41. feladat szerint egy mátrix akkor és csak akkor unitér, ha a skaláris szorzást megtartja, tehát: $(U^*x, U^*y) = (UU^*x, y) = (UU^{-1}x, y) = (Ix, y) = (x, y)$

1.2.44. $A = \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{1}{2}(A - A^\dagger)$. Az első mátrix szimmetrikus (hermitikus), a második antiszimmetrikus (antihermitikus).

1.2.45. n. $\; -n$.

1.2.46. $Tr(A+B) = \sum\limits_i (A_{ii} + B_{ii}) = \sum\limits_i A_{ii} + \sum\limits_i B_{ii} = Tr(A) + Tr(B)$

1.2.47. $Tr(AB) = \sum\limits_i (AB)_{ii} = \sum\limits_{ij} A_{ij} B_{ji} = \sum\limits_{ji} B_{ji} A_{ij} = \sum\limits_j (BA)_{jj} = Tr(BA)$

1.2.48. $Tr(C^{-1}AC) = Tr(C^{-1}CA) = Tr(IA) = Tr(A)$ és hasonlóan a determinánsra is.

1.2.49. Reflexivitás: egy négyzetes mátrix hasonló önmagához. Ez a $C = I$ választással látható. Ez a reláció szimmetrikus is, elég ennek igazolásához C és C^{-1} szerepét megcserélni. A reláció ezen túl tranzitív is: $B = C^{-1}AC$ $D = K^{-1}BK \Rightarrow D = K^{-1}C^{-1}ACK$, és az 1.2.25. feladat szerint $(CK)^{-1} = K^{-1}C^{-1}$.

1.2.50. $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 3, \; x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \; x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

1.2.51. $A\mu x = \mu A x = \mu \lambda x = \lambda \mu x$

1.2.52. $A^n x = A^{n-1}Ax = A^{n-1}\lambda x$... Lehet teljes indukciózni, aki ráér...

1.2.53. Legyen $Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$. Megszorozzuk az első egyenletet balról x_2^*-tal, a másodikat pedig x_1^*-tal. A két egyenlet kivonásával (kihasználva az A mátrix és a skalárszorzat hermitikusságát) adódik: $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2)$ A sajátértékek különböznek, tehát a sajátvektoroknak kell ortogonálisnak lenni.

1.2.54. $\dfrac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$

1.2.55. $\dfrac{\ln 3}{2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.2.56. $\lambda_{1,2} = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$ $\lambda_{1,2}$ valós, ha a $D \geq 0$, ahol D a diszkrimináns. $D = (a-d)^2 + 4bc$ Ez szimmetrikus mátrixok esetén mindig nagyobb nullánál, de nem kell egy mátrixnak szimmetrikusnak lennie, hogy valósak legyenek a sajátértékei.

1.2.57. $\lambda_{1,2} = \frac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A) - 4\det A}}{2}$ Tehát a sajátértékek csak olyan mennyiségektől függenek, amelyek a hasonlósági transzformáció szempontjából invariánsak.

1.2.58. $\lambda_{1,2} = \frac{E + F \pm \sqrt{(E-F)^2 + 4V^2}}{2}$

1.2.59. $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = \sqrt{2}$ Ez három molekulapálya kialakulását jelenti, amelyre kettő, három vagy négy elektron beépülése esetén az elektronrendszer energiája kisebb, mint a kiindulási helyzeté. Az allilkation kettő, az allilgyök három, az allilanion pedig négy π elektront tartalmaz.

1.2.60. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a rendszer szomszédsági mátrixa. Könnyen megsejthető, hogy a -1 gyöke a karakterisztikus polinomnak. Ezek alapján a polinomosztással kiderül, hogy $\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$, azaz a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 2$. Igazából azok a b egységek, amiben az energiát mérjük, negatívak. Ezért a itt két magasabb és egy alacsonyabb energiájú állapot alakul ki. A ciklopropenilkation lesz az, amelyik stabil lesz, hiszen annak két π elektronja éppen betölti az alacsony energiájú pályát. A ciklopropenilkation származékait már szintetizálták.

1.4.3 Egyváltozós valós analízis

1.3.1. (a) A=1 (b) A=0 (c) A=0 (d) A=1 (e) A= $\begin{cases} \infty & \text{ha } k > l \\ \frac{a_k}{a_l} & \text{ha } k = l \\ 0 & \text{ha } k < l \end{cases}$ (f) $A = \infty$

1.3.2. (a) $F(\epsilon) = b^2\epsilon^2 + (b^2 + 2ab)\epsilon^3 + O(4)$ (b) $F(\epsilon) = 1 + \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(3)$ (c) $F(\epsilon) = a^3 + b^2 + (3a^2 + 2bc)\epsilon + O(2)$

1.3.3. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{(x_0+\epsilon)^3 - x_0^3}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2\epsilon + 3x_0\epsilon^2 + \epsilon^3 - x_0^3}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{3x_0^2\epsilon + O(2)}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}(3x_0^2 + O(1)) = 3x_0^2$

1.3.4. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{c-c}{\epsilon} = 0$

1.3.5. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{(x_0+\epsilon)^n - x_0^n}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k \epsilon^{n-k} - x_0^n}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{n x_0^{n-1}\epsilon + O(2)}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}(n x_0^{n-1} + O(1)) = n x_0^{n-1}$

1.3.6. $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\sin(x_0+\epsilon) - \sin x_0}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\sin x_0 \cos\epsilon + \cos x_0 \sin\epsilon - \sin x_0}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \frac{\cos x_0 \sin\epsilon}{\epsilon} = \cos x_0$

1.3.7. $f'(x) = 6(2x+1)^2$

1.3.8. $f'(x) = \frac{-18x^2}{(3x^2 - 3x)^2}$

1.3.9. $f'(x) = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

1.3.10. $\arcsin' x = \frac{1}{\cos\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos' x = -\frac{1}{\sin\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\arccos x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\mathrm{arctg}' x = \cos^2 \mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\, \mathrm{arctg}\, x + 1} = \frac{1}{x^2+1}$

$\mathrm{arcctg}' x = -\sin^2 \mathrm{arcctg}\ x = -\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\, \mathrm{arcctg}\ x + 1} = -\frac{1}{x^2+1}$

1.3.11. $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$

1.3.12. $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

1.3.13. $f^{'}(x) = 3e^{4x^2}(48x^3 + 16x^2 + 20x + 2)$

1.3.14. $\sqrt{1+0.1} = 1 + \frac{1}{2}1^{-1/2}0.1 - \frac{1}{4}1^{-3/2}0.1^2 + O(3) = 1.0475 + O(3)$

1.3.15. $\ln(3.01) = \ln 3 + 0.01\frac{1}{3} - 0.0001\frac{1}{18} + O(3)$ A közelítés hibája a következő taggal becsülhető, azaz $\frac{1}{81}0.01^3 \approx 10^{-8}$

1.3.16. Legyen $10°$ ϵ radián és alkalmazzuk a sin hatványsorát és a négyzetgyökfüggvény Taylor-sorát!
$\sqrt{1-\sin 10°} = \sqrt{1-\sin\epsilon} = \sqrt{1-\epsilon+O(3)} = 1 - \frac{\epsilon}{2} + O(2) \approx 0.91$

1.3.17. Alkalmazzuk mindegyik függvény Taylor-sorát!
$\exp\sqrt{1-\operatorname{arctg} 0.002} = \exp\sqrt{1-0.002} = \exp(1-0.001) \approx e$

1.3.18. A deutérium és a prócium atom energiája csak kis mértékben különbözik, ezért legyen $F = E + 2\epsilon$.
Ekkor az új energiasajátértékek: $E + \epsilon \pm (V + \frac{1}{2}\frac{\epsilon^2}{V})$.

1.3.19. Az $f(x) = x^4$ függvény deriváltjai: $f^{'}(x) = 4x^3$, $f^{''}(x) = 12x^2$, $f^{'''}(x) = 24x$, $f^{(4)}(x) = 24$. A nulla az egyetlen olyan pont, ahol a függvény maga és az első három derivált eltűnik. Az első el nem tűnő derivált rendje páros, inflexiós pont nincsen, szélsőérték van. Pozitív, tehát minimum van.

1.3.20. $f^{'}(x) = -x(1+x^2)^{-3/2}$. Ez a nullában és a végtelenben tűnik el. $f^{''}(x) = -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2}$. Ez a nullában nem tűnik el, ott értéke -1, tehát maximuma van. A végtelenben mindegyik derivált eltűnik, de mivel monoton csökkenő függvényről van szó (a pozitív félegyenesen), tudhatjuk, hogy a végtelenben minimuma van.

1.3.21. $f^{'}(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$, $f^{''}(x) = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x}$. Az első derivált a nullában, a kettőben és a végtelenben eltűnik. Az első el nem tűnő derivált a nullában a második, értéke 2, tehát ott minimuma van. A kettőben a második derivált negatív, ott tehát maximum van. A végtelenben ismét minden derivált 0, de tudhatjuk a függvény alakjából, hogy ott minimum van.

1.3.22. $(\frac{1}{a}F(ax+b) + C)^{'} = (\frac{1}{a}F(ax+b))^{'} = a\frac{1}{a}f(ax+b) = f(ax+b)$
$(\ln|f(x)| + C)^{'} = (\ln|f(x)|)^{'} = \frac{f^{'}(x)}{f(x)}$
$(\frac{1}{2}f^2(x) + C)^{'} = (\frac{1}{2}f^2(x))^{'} = 2\frac{1}{2}f'(x)f(x) = f'(x)f(x)$
$((f(x)g(x) - \int f'(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$

1.3.23. (a) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$ (b) $F(x) = e^x(x-1) + C$

1.3.24. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^x x^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!} + C$

1.3.25. (a) $F(x) = \int \frac{(x^2+3x+5)'}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5| + C$ (b) $F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1} = ln|e^x+1| + C = \ln(e^x+1) + C$

1.3.26. (a) $F(x) = \frac{6}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7x + C$ (b) $F(x) = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \int 1 - \int \frac{1}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

1.3.27. (a) $F(x) = -\frac{1}{5}(1-4x)^5 + C$ (b) $F(x) = \frac{1}{2}\int \sin 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

1.3.28. $1 + x^2 > 0$, Logaritmikus integrálással: $\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

1.3.29. (a) $F(x) = \int \cos x\ e^{3x} = \frac{1}{3}\cos x\ e^{3x} + \frac{1}{3}\int \sin x\ e^{3x} \quad \Rightarrow \quad 9F(x) = 3\cos x\ e^{3x} + 3S(x)$
$F(x) = \int \cos x\ e^{3x} = -\sin x\ e^{3x} - 3\int \sin x\ e^{3x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\sin x\ e^{3x} - 3S(x)$
$10F(x) = e^{3x}(3\cos x - \sin x) \quad \Rightarrow F(x) = \frac{e^{3x}}{10}(3\cos x - \sin x) + C$

(b) $F(x)=\int \operatorname{sh}4x\; e^{2x}=\frac{1}{2}\operatorname{sh}4x\; e^{2x}-2\int \operatorname{ch}4x\; e^{2x} \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}4x\; e^{2x}-2S(x)$

$F(x)=\int \operatorname{sh}4x\; e^{2x}=\frac{1}{4}\operatorname{ch}4x\; e^{2x}-\frac{1}{2}\int \operatorname{ch}4x\; e^{2x} \quad \Rightarrow \quad 4F(x)=\operatorname{ch}4x\; e^{2x}-2S(x)$

$3F(x)=e^{2x}(\operatorname{ch}4x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}4x) \quad \Rightarrow F(x)=\frac{e^{2x}}{3}(\operatorname{ch}4x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}4x)+C$

Egy másik megoldáshoz vezet az, ha felhasználjuk az $\operatorname{sh}4x=\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}$ azonosságot.

1.3.30. (a) $\int \frac{5x+6}{x^2+x-2}=\int \frac{5x+6}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\int \frac{5x+6}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{5x+6}{x+2}=$

$=\frac{5}{3}\int \frac{(x-1)+\frac{11}{5}}{x-1}-\frac{5}{3}\int \frac{(x+2)-\frac{4}{5}}{x+2}=\frac{1}{3}(11\ln|x-1|+4\ln|x+2|)$

(b) Helyettesítéssel: $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+\cos x}dx=\int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{2dt}{1+t^2+1-t^2}=$

$=\int dt=t+C=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$

1.3.31. $\int \sqrt[4]{7x-16}=\frac{1}{7}\int t^{1/4}dt=\frac{1}{7}\frac{4}{5}t^5=\frac{4}{35}(7x-16)^{5/4}$

1.3.32. $t=-3x+4 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{(-3x+4)^4}dx=-\frac{1}{3}\int t^{-4}dt=\frac{1}{3}\frac{1}{3}t^{-3}=\frac{1}{9(-3x+4)^3}$

1.3.33. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int \frac{t-1}{t+1}\frac{1}{t}dt=\int \frac{t-1}{t}-\int \frac{t-1}{t+1}=\int \frac{t}{t}-\int \frac{1}{t}-\int \frac{t+1-2}{t+1}=-\int \frac{1}{t}+2\int \frac{1}{t+1}=2\ln(e^x+1)-x$

1.3.34. $t=e^x \quad \Rightarrow \quad \int e^{2x}\sin(e^x)dx=\int t^2\sin t\frac{1}{t}dt=\int t\sin t=-t\cos t+\int \cos t=-t\cos t+\sin t=\sin(e^x)-e^x\cos(e^x)$

1.3.35. (a) $\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)}=-\frac{14}{5}\int \frac{1}{x-3}+\frac{7}{15}\int \frac{1}{x+2}+\frac{7}{3}\int \frac{1}{x-4}=$

$-\frac{14}{5}\ln|x-3|+\frac{7}{15}\ln|x+2|+\frac{7}{3}\ln|x-4|$

(b) $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sin x\cos x}=\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}dt=\int \frac{1}{t}dt-\int \frac{1}{1+t}dt+\int \frac{1}{1-t}dt=$

$\ln t-\ln(1+t)-\ln(1-t)=\ln\frac{t}{1-t^2}=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\ln|\frac{\operatorname{tg}x}{2}|$

1.3.36. 1.3.23 (a) $\frac{1}{2}(\cos 3-\cos 5)$ (b) 1

1.3.24 Majd egyszer...

1.3.25 (a) $\ln 9-\ln 5$ (b) $\ln(1+\frac{1}{e})$

1.3.26 (a) $\frac{53}{10}$ (b) $1-\frac{\pi}{4}$

1.3.27 (a) Nincs értelmezve. (b) $\frac{1}{4}(1-\cos 2)$

1.3.37. $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{\int_0^{x+\epsilon}g(y)dy-\int_0^{x}g(y)dy}{\epsilon}=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon)\epsilon}{\epsilon}=\lim\limits_{\epsilon\to 0}g(x+\epsilon)=g(x)$

1.3.38. (a) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to\infty}\ln A-\ln 1=\infty$: divergens

(b) $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{2}$

(c) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\lim\limits_{A\to\infty}[\operatorname{arctg}x]_0^{\infty}=\pi$

1.3.39. $\int\limits_0^\infty x^5 e^{-2x} dx = \dfrac{-60}{-2^5} = 1.875$

1.3.40. $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_0^\infty + x \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} = x\Gamma(x)$

1.3.41. $\Gamma(1) = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

$\Gamma(2) = [-e^{-t} t]_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-t} = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

1.3.42. $\int\limits_0^1 x dx^2 = \int\limits_0^1 2x^2 dx = [\frac{2}{3} x^3]_0^1 = \dfrac{2}{3}$

1.3.43. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2x d|x| = -\int\limits_{-\pi/4}^{0} \sin 2x dx + \int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x dx = -[-\frac{1}{2}\cos 2x]_{-\pi/4}^0 + [-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\pi/4} = 1$